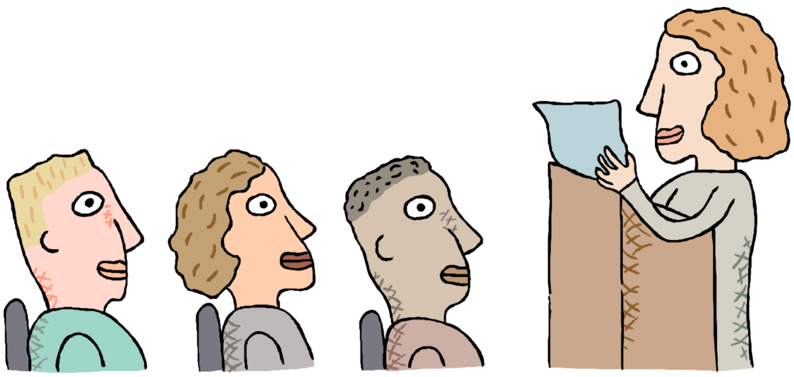
School of Engineering
Winterthur
Zürcher Hochschule für Angewandte Wissenschaften

Analysis für Ingenieure

I & II

Skript

(R. Axthelm)



Winterthur
HS15 & FS16

Überblick

Basics (Grundwortschatz)

- Mengen, Aussagen, Beweismethoden
- Summe, Produkt, Fakultät, Binomische Formel
- Folgen, Reihen. Grenzwerte
- Funktionsbegriff, Betragsfunktion, (Un–)Gleichungen

Funktionen (Kurvendiskussion und Integration)

Polynome/ Potenzfunktionen
- Nullstellen, Interpolation, Konstruktion
- Einführung Differentiation
  Extrema, Wendepunkte
- Einführung Integration, HDI

Exponential– und Logarithmus–funktionen
- Verknüpfung, Umkehrabbildung
- Kettenregel, Abl. der Umkehrab.
- partielle Integration

Rationale Funktionen
- Asymptote, Polynomdivision
- Partialbruchzerlegung

Trigonometrische Funktionen
- Transformationen, Schwingung
- Ableitung der trig. Funktionen
- Integration von trig. Funktionen

Funktionen (Transformation und Entwicklung)

- Transformationsformel, uneigentliche Integration
  Anwendungen der Integration
- Potenzreihen, Taylorreihe

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen 1
  1.1 Mengenschreibweisen 2
  1.2 Zahlmengen 6
  1.3 Potenz und Wurzel 13
  1.4 Rasiermesserscharfe Logik: mathematische Aussagen 13
  1.5 Vollständige Induktion 18
  1.6 Die Binomische Formel 23

2 Folgen und Reihen 27
  2.1 Folgen und Grenzwerte 27
  2.2 Die Eulersche Zahl 34
  2.3 Reihen 38

3 Funktionen I: Polynome 43
  3.1 Eigenschaften von Funktionen I: Definition und Grundlegendes 44
  3.2 Die Betragsfunktion 46
  3.3 Polynome 51
    3.3.1 Nullstellen und Linearfaktoren 52
    3.3.2 Polynomkonstruktionen 58
  3.4 Differentiation I 60
    3.4.1 Motivation 61
    3.4.2 Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit 63
    3.4.3 Differentiation von Polynomen 68
    3.4.4 Extrema und Wendepunkte von Polynomen 75
  3.5 Integration I 80
    3.5.1 unbestimmte Integration und Stammfunktionen 80
    3.5.2 bestimmte Integration und Flächeninhalt 84

4 Funktionen II:
Logarithmus und Exponentialfunktion 93
4.1 Eigenschaften von Funktionen II:
Verkettung und Umkehrung 94
4.2 Exponential- und Logarithmusfunktion 97
4.3 Differentiation II 101
4.4 Integration II:
partielle Integration 110

5 Funktionen III:
rationale Funktionen 114
5.1 Eigenschaften von Funktionen III: Asymptoten 115
5.2 Integration III: Partialbruchzerlegung 118

6 Funktionen IV:
Trigonometrische Funktionen 125
6.1 Definition und Eigenschaften der Sinusfunktionen 126
6.2 Differentiation von Trigonometrischen Funktionen 137
6.3 Integration IV 142
6.4 Schwingungslehre 143

7 Integration V
Ableiten ist ein Handwerk; Integrieren eine Kunst 148
7.1 Integration durch Substitution 149
7.2 Uneigentliche Integrale 153
7.3 Anwendungen des Integrals 158
7.3.1 Länge eines Grafen 158
7.3.2 Volumen von Rotationskörpern 160
7.3.3 Mantelflächen 163

8 Potenzreihen 165
8.1 Was ist das? Eine Funktion! 165
8.2 Taylorreihe: Funktionen "ertasten" 173

Grundlagen 1

Wir behandeln:

- Mengen und Schreibweisen
- Zahlen und Rechnen
- Logik und Beweismethoden
- Neue Zeichen für's Leben

»Er hat ein paar LGS hingeschrieben, einige Theoreme eingestreut und eh ich mich's versah hab ich ihm den ganzen Beweis abgenommen ...«

In diesem Kapitel wollen wir grundsätzliche Regeln der mathematischen "Sprache" und Aussagelogik festlegen. Wir benötigen dieses Werkzeug, um klar, unmissverständlich und eindeutig Dinge mathematisch beschreiben und mathematische Aussagen treffen zu können.

1.1 Mengenschreibweisen

Eine grundlegende Fähigkeit menschlichen Geistes ist es, Objekte zu einem Ganzen zusammenfassen zu können. So fassen wir die Einwohner der Schweiz zu einem Ganzen zusammen, indem wir sie die Bevölkerung der Schweiz oder auch kurz Schweizer nennen. Wir wollen Objekten, die wir aufgrund einer bestimmten Eigenschaft zusammenfassen einen Namen geben:

> **Regel 1: Mengen:**
> Eine *Menge* ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Objekte einer Menge heißen *Elemente*.

Ist a ein Element der Menge M so sagen wir "a ist Element von M" und schreiben

$$a \in M$$

und ist a hingegen kein Element von M so sagen wir "a ist nicht Element von M" und schreiben

$$a \notin M\,.$$

Wir unterscheiden zwischen Mengen in aufzählender und beschreibender Form. Zur beschreibenden Menge gehört zum Beispiel die folgende:

$$M := \{x \mid x \text{ hat die Eigenschaft } E\}$$

Wir sagen: "M ist definiert als (:=) die Menge aller Elemente x für die gilt (|), dass sie die Eigenschaft E haben."

Eine Menge aufzählender Form wäre etwa:

$$M := \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Wir sagen: "M ist definiert als die Menge bestehend aus den Zahlen $1, 2, 3, 4$ und 5."

Wir arbeiten auch mit Mengen, die keine Elemente enthalten. Wir sprechen dann von der *leeren Menge* und schreiben

$$\emptyset := \{\}\,.$$

N heißt *Teilmenge* von M, wenn jedes Element in N auch eine Element von M ist. Auch dafür gibt es eine Schreibweise:

$$N \subseteq M$$

Das bedeutet, dass jedes Element von N auch ein Element von M ist.

Man beachte, dass wenn N eine Teilmenge von M ist auch $N = M$ gelten kann. Soll die Gleichheit ausgeschlossen werden so sagen wir "N ist echte Teilmenge von M" und schreiben

$$N \subset M \, .$$

In anderen "Worten":

$$N \subseteq M \text{ und es gibt ein } x \in M \text{ mit } x \notin N$$

Spätestens jetzt sollten wir uns über die mathematische Bedeutung von "es gibt ein" klar werden. Im mathematischen Formalismus bedeutet "es gibt ein" stets "es gibt mindestens ein". Darf es nicht mehr geben so sagt man "es gibt genau ein".

Auch für diesen Formalismus existieren hilfreiche Ausdrucksformen, nämlich die sogenannten *Quantoren*. So heißt

$$\exists\, x \in M \mid E$$

"es existiert ein Element x der Menge M mit der Eigenschaft E". E ist hierbei nicht die Eigenschaft, die die Menge M auszeichnet. Die Menge M könnte beispielsweise die Menge aller männlichen Schweizer sein und die Eigenschaft E könnte schwarzhaarig bedeuten. Dann wäre die Aussage $\exists\, x \in M \mid E$ gleichbedeutend mit "Es gibt einen Schweizer, der schwarze Haare hat". Es kann hier, wir erinnern uns, durchaus auch bedeuten, dass mehrere oder gar alle schweizer Männer schwarze Haare haben.

Während hingegen

$$\exists!\, x \in M \mid E$$

bedeutet "es existiert genau ein Element x der Menge M mit der Eigenschaft E". Für unsere männlichen Schweizer würde es bedeuten, dass es im ganzen Land nur einen einzigen schwarzhaarigen Mann gibt. Eher unwahrscheinlich.

$$\forall x \in M \mid E$$

bezeichnet "alle Elemente x der Menge M, die die Eigenschaft E haben".

Bei der Beschreibung von Elementeigenschaften einer Menge sind die Zeichen $\vee$ für das logische ODER und $\wedge$ für das logische UND zur Steigerung der Übersicht und Darstellungseleganz äußerst nützlich.

Mengen können miteinander operieren. Man kann sie vereinen, gemeinsame Elemente bezeichnen, sie addieren und voneinander abziehen, um nur die grundlegendsten von allen möglichen Mengenoperationen zu nennen. Unter der *Vereinigung* von Mengen M und N

$$M \cup N := \{x \mid (x \in M) \vee (x \in N)\}$$

verstehen wir alle Elemente, die sowohl in M als auch in N enthalten sind, wohingegen der *Durchschnitt* oder auch kurz *Schnitt* der beiden Mengen

$$M \cap N := \{x \in M \mid x \in N\}$$

nur die Elemente beinhaltet, die in M und gleichzeitig in N enthalten sind. Ziehen wir die Menge N von der Menge M ab, sprich "M *ohne* N",

$$M \setminus N := \{x \in M \mid x \notin N\}$$

so erhalten wir alle Elemente, die in M und nicht in N sind. Unter dem Komplement der Menge M

$$M^{\complement} := \{x \mid x \notin M\}$$

verstehen wir die Menge aller Elemente, die nicht in M sind.

Beispiel 1 Äpfel und Birnen Vor Ihnen stehen zwei Obstkörbe. Der linke Korb enthält zwei Äpfel und drei Birnen. Der rechte Korb enthält zwei Äpfel und eine Orange. Was ist die Schnittmenge dieser beiden Mengen?

Die Schnittmenge ist die leere Menge. Warum?

Mengen M und N heißen *disjunkt*, wenn sie kein gemeinsames Element haben. Es gilt dann

$$M \cap N = \emptyset\,.$$

Zwei Mengen M und N heißen *gleich*, genau dann wenn

$$M \subseteq M \wedge N \subseteq M$$

gilt.

Mengen selbst können Elemente von Mengen sein. Zum Beispiel sind

$$\{\{1,2\},3\}\,,\quad \{\{\emptyset\}\}\,,\quad \{\emptyset,\{1,2\},a\}$$

Mengen im Sinne der Definition.

Wir können auch das Produkt von Mengen definieren. Sie dürfen sich allerdings darunter nicht vorstellen, dass je zwei Elemente aus zwei Mengen miteinander multipliziert werden! Wie soll das auch funktionieren, wenn die eine Menge aus Äpfeln und die andere aus Birnen besteht? Man sollte sich viel mehr vorstellen, dass das Produkt von Mengen eine Menge von Paaren, gebildet aus den Elementen der ursprünglichen Mengen, besteht. Wir definieren:

Die *Produktmenge* $M \times N$ zweier Mengen M und N ist definiert durch

$$M \times N := \{(a,b) \mid (a \in M) \wedge (b \in N)\}\,,$$

die Menge der *geordneten Paare*.

Zwei Elemente (c, d) und (e, f) aus $M \times N$ heißen *gleich* wenn $c = e$ und $d = f$ gilt. Wir schreiben das mal mathematisch:

Für $(c, d),\ (e, f) \in M \times N$ gilt: $(c, d) = (e, f) \ \Leftrightarrow\ c = e \wedge d = f$.

Wir können natürlich Produktmengen aus beliebig vielen Mengen bilden. Allgemein formuliert sieht das dann so aus:

$$M_1 \times \cdots \times M_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in M_i, i = 1, \ldots, n\}$$

$(a_1, \ldots, a_n)$ heißt *geordnetes n–Tupel*. Falls $M_1 = \cdots = M_n =: M$ so schreibt man auch

$$M^n \quad \text{statt} \quad \underbrace{M \times \cdots \times M}_{n-mal}$$

Beispiel 2 Produktmengen

- $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$ ((x, y)–Ebene)
- $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge z \in \mathbb{R}\}$ (3–dimensionaler Raum)
- $[0, 1]^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1 \wedge 0 \leq z \leq 1\}$ (Einheitswürfel im $\mathbb{R}^3$)
- $\{0, 1\}^2 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 1), (1, 0)\}$ (die Menge aller Eckpunkte des Quadrats $[0, 1]^2 \subseteq \mathbb{R}^2$

Wir fassen alle beschriebenen Mengenbezeichnungen zusammen:

Regel 2: Mengenschreibweisen:

Schreibweise	Definition	Sprechweise
$x \in M$		x ist Element von M
$x \notin M$		x ist nicht Element von M
$\{x \mid x \text{ hat die Eigenschaft } E\}$		Menge aller x mit der Eigenschaft E.
$\emptyset$	$:= \{\}$	leere Menge
$N \subseteq M$		N ist Teilmenge von M
$N \subset M$		N ist echte Teil–menge von M
Existenz–operator: $\exists\, x$		es existiert ein x
$\exists!\, x$		es exist. genau ein x
Generalisierungs–quantor: $\forall$		für alle
$\vee$		logisches ODER
$\wedge$		logisches UND
Durchschnitt: $M \cap N$	$:= \{x \in M \mid x \in N\}$	M geschnitten N
Vereinigung: $M \cup N$	$:= \{x \mid (x \in M) \vee (x \in N)\}$	M vereinigt N
Differenz: $M \setminus N$	$:= \{x \in M \mid x \notin N\}$	M ohne N
Komplement: $M^{\complement}$	$:= \{x \mid x \notin M\}$	Komplement von M
Produktmengen:		
$M \times N$	$:= \{(a,b) \mid (a \in M) \wedge (b \in N)\}$	
$M_1 \times \cdots \times M_n$	$:= \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in M_i, i = 1, \ldots, n\}$	

1.2 Zahlmengen

Wir wollen uns nun mit ganz speziellen Mengen befassen, nämlich den Zahlmengen. Wir haben in den voranstehenden Kapiteln schon mit ihnen gearbeitet, ganz so als wüssten wir worum es geht. Und in der Tat verhält es sich ja so, dass wir durch unsere Erfahrungen viel mit Zahlen zu tun hatten, woraufhin sich ein gewisser Gewöhnungseffekt eingestellt hat. Nichts desto trotz ist es so, dass Zahlen nicht etwa in der Natur zu beobachten sind – oder haben Sie schon einmal gesehen, wie sich eine 2 mit sich selbst multipliziert hat? – sondern ein geistiges Konstrukt des Menschen darstellen. Wir wollen in diesem Kapitel die für uns relevantesten Zahlmengen zusammenfassen:

Wir starten mit der Zahl 1. Dann nehmen wir noch eine weitere 1 hinzu und erhalten die 2. Noch eine 1 liefert die 3. Wir wollen diesen Prozess unendlich oft wiederholen und fassen aus zeitlichen Gründen alle Zahlen, die wir auf diese Weise erhalten zusammen zu einer Menge, versehen diese mit dem Symbol $\mathbb{N}$ und nennen sie die Menge der *natürlichen Zahlen*. Es gilt

also
$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}\,.$$
Wollen wir auch die 0 einbeziehen so versehen wir unser Symbol mit einer entsprechenden Kennzeichnung $\mathbb{N}_0$. Es ist demnach

$$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}\,.$$

Wir wollen auch mit negativen Zahlen rechnen, also fügen wir sinnvollerweise zu $\mathbb{N}_0$ alle natürlichen Zahlen, versehen mit einem negativen Vorzeichen hinzu und nennen die neue Menge $\mathbb{Z}$. Das ist die Menge der *ganzen Zahlen* und hat die Darstellung

$$\mathbb{Z} := \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}\,.$$

Bilden wir nun Brüche (*Zähler* durch *Nenner*) aus je zwei ganzen Zahlen, wobei wir peinlichst darauf achten, dass der Nenner immer ungleich Null ist, so erhalten wir die Menge der *rationalen Zahlen*, die wir mit $\mathbb{Q}$ bezeichnen und die mathematische Definition

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n} \,\middle|\, m, n \in \mathbb{Z} \;\wedge\; n \neq 0 \;\wedge\; GGT(m, n) = 1 \right\}$$

besitzt. Für $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $n \neq 0$ heißt der Bruch

$$\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$$

gekürzt oder auch *reduziert*, wenn m und n keinen gemeinsamen *nichttrivialen* Teiler haben. Ein trivialer Teiler wäre die 1. [1]

Es gab also zunächst natürliche, ganze und rationale Zahlen. Bis man entdeckte, dass das nicht ausreicht. Die Diagonale im Quadrat der Seitenlänge 1 zum Beispiel kann nicht als rationale Zahl geschrieben werden. Ich nehme die Spannung raus und verrate schon mal, dass diese Diagonale die Länge $\sqrt{2}$ hat. Aus der Schule wissen wir, dass $\sqrt{2}$ diejenige Zahl ist, die mit sich selbst multipliziert gerade die 2 ergibt. Aber können wir sie konkret darstellen? Wir kennen einen genäherten Wert $\sqrt{2} \approx 1.414213562\ldots$, aber vollständig beschrieben ist sie damit nicht. Wir werden uns in Kapitel 1.4 (Satz 1.1) davon überzeugen, dass es eine "vollständigere" Darstellung als die, die wir bereits verwendet haben, nämlich $\sqrt{2}$, nicht gibt.

[1] Die Definitionen der Zahlenmengen haben historische Gründe:

> *Die antiken Griechen, die Schöpfer der beweisenden Mathematik, vertraten unter dem Einfluß der pythagoreischen Schule lange die waghalsige Lehre, dass die Welt sich durch natürliche Zahlen und deren Verhältnis – also die rationalen Zahlen – beschreiben lasse. Die Entdeckung, dass man jedoch die Diagonale eines Quadrats so nicht beschreiben kann war für die Griechen ein tiefer Schock; den frevelhaften Entdecker dieser Ungeheuerlichkeit – pikanterweise ein Mitglied der pythagoreischen Schule selbst – sollen seine pythagoreischen Genossen denn auch zur Strafe während einer Seefahrt ins Meer geworfen haben.*

Wir nennen alle Zahlen auf der Zahlengeraden die *reellen Zahlen* und bezeichnen diese mit dem Symbol $\mathbb{R}$. $\sqrt{2}$ zum Beispiel ist sicher eine Zahl, die sich in dieser Menge befindet, aber nicht in $\mathbb{Q}$ enthalten ist. Damit gilt schon mal, dass

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \neq \emptyset\,.$$

Wir gehen einmal davon aus, dass es noch mehr Zahlen gibt, die nicht rational sind, so dass es sich lohnt dieser speziellen Menge einen Namen zu geben. Sie hat kein eigenes Symbol, aber wir nennen sie die Menge der *irrationalen Zahlen*. Weitere Beispiele für irrationale Zahlen sind etwa

$\mathrm{e} = 2,71828...$	*Eulersche Zahl* (siehe Kapitel 2.1)
$\pi = 3,14159...$	*Kreiszahl* (sprich "pi")

Wir fassen bis dahin schon mal zusammen:

Regel 3: Zahlmengen

Name	Schreibweise	Definition
natürliche Zahlen:	$\mathbb{N}$	$:= \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$
mit der Null:	$\mathbb{N}_0$	$:= \mathbb{N} \cup \{0\}$
ganze Zahlen:	$\mathbb{Z}$	$:= \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
rationale Zahlen:	$\mathbb{Q}$	$:= \left\{ \frac{m}{n} \,\middle|\, m, n \in \mathbb{Z} \wedge n \neq 0 \;\wedge\; GGT(m, n) = 1 \right\}$
reelle Zahlen:	$\mathbb{R}$	:= alle Zahlen auf der Zahlengeraden
irrationale Zahlen:	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$	:= alle Zahlen aus $\mathbb{R}$, die nicht rational sind

In Kapitel 2.1 werden wir Zahlen aus $\mathbb{R}$ kennenlernen, die, obwohl auf den ersten Blick nicht ersichtlich, dennoch durch einen Bruch darstellbar sind. Um das einzusiehen benötigen wir aber erst noch ein wenig mathematisches Werkzeug.

Mengen der Form

$$\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 3\}$$

werden auch durch eckige Klammern in der Form

$$[-2, 3]$$

dargestellt. Wir nennen diese speziellen Teilmengen der reellen Zahlen *Intervalle*. Es gibt folgende Intervallformen

Regel 4: Intervalle

Schreibweise	Definition	Beschreibung
$[a,b]$	$:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \subset \mathbb{R}$	abgeschlossenes Intervall
(a,b)	$:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \subseteq \mathbb{R}$	offenes Intervall
$[a,b)$	$:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \subset \mathbb{R}$	(halb–)offenes Intervall
$(a,b]$	$:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \subset \mathbb{R}$	(halb–)offenes Intervall

Die Unterscheidung $\subset$ und $\subseteq$ beim offenen Intervall (a,b) hat damit zu tun, dass bei unbeschränkten Intervallgrenzen $a = -\infty$ und $b = \infty$

$$(a,b) = \mathbb{R}$$

gilt und $\mathbb{R}$ keine abgeschlossene Menge ist. Solcherlei mathematische Hintergründe interessieren uns aber nicht weiter. Wir vermerken es an dieser Stelle nur der Vollständigkeit wegen, da es immer mal wieder auftaucht und wir es einfach korrekt hinschreiben wollen.

Regel 5: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $-\infty < a, b < \infty$.

$$\xcancel{[a,\infty]} \quad \text{sondern immer} \quad [a,\infty)$$

genauso:

$$\xcancel{[-\infty,b]} \quad \text{sondern immer} \quad (-\infty,b]$$

Eine weitere übliche Schreibweise für offene Intervalle (a,b) ist durch

$$]a,b[$$

gegeben.

Wir wollen noch eine kleine Notation einführen, die es uns erlaubt zwischen positiven und negativen, sagen wir reellen, Zahlen zu unterscheiden. Sprechen wir von *positiven reellen Zahlen* so meinen wir Zahlen, die größer als Null sind und bezeichnen diese mit $\mathbb{R}^+$. Es ist also

$$\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}.$$

Sprechen wir hingegen von *nicht negativen reellen Zahlen* so meinen wir Zahlen, die nicht kleiner als Null sind und bezeichnen sie mit $\mathbb{R}_0^+$. Sehen Sie den Unterschied? Es ist nämlich

$$\mathbb{R}_0^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}.$$

$\mathbb{R}^-$ und $\mathbb{R}_0^-$ definieren wir analog.

Auf die Menge der sogenannten *komplexen Zahlen*, versehen mit dem Symbol $\mathbb{C}$ werden wir nicht umfassend eingehen, denn sie sind Bestandteil der Linearen Algebra im zweiten Semester. Sie sind allerdings ein wesentlicher Bestandteil der höheren Mathematik und da wir bisher nur Zahlmengen betrachtet haben, die uns eigentlich schon bekannt waren wollen wir uns gerne auch etwas Neuem widmen.

Die Grundidee der komplexen Zahlen kommt aus der vermeintlich nicht lösbaren Situation, bei der ein x gesucht wird mit

$$x^2 + 1 = 0\,.$$

Wir haben gelernt, dass wir die Wurzel nicht aus negativen Zahlen ziehen dürfen, weil keine reelle Zahl im Quadrat negativ sein kann! Und weil es heißt "Was der Mathematiker nicht hat, das macht er sich." definieren wir uns einfach Zahlen, deren Quadrat negativ sein kann. Mit dem Symbol i bezeichnen wir eine "imaginäre" $\sqrt{-1}$. Es ist dann signifikanterweise $i^2 = -1$. Eine $komplexe\ Zahl$ c ist eine Größe der Form

$$c = a + i \cdot b\,,$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$ gilt. Die Menge aller komplexen Zahlen wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet, das heißt also

$$\mathbb{C} = \{c \,|\, c = a + i \cdot b \ \wedge \ a, b \in \mathbb{R}\}\,.$$

Wir nennen a den $Realteil$ und b den $Imaginärteil$ von c.

Regel 6: komplexe Zahlen

Name	Schreibweise	Definition
komplexe Zahl:	c	$:= a + i \cdot b$
konjugiert komplexe Zahl:	$\bar{c}$	$:= \overline{a + i \cdot b} = a - i \cdot b$
Realteil von c:	$\mathrm{Re}(c)$	$:= a$
Imaginärteil von c:	$\mathrm{Im}(c)$	$:= b$

Rechenregeln fürkomplexe Zahlen

Addition:	$(a + i \cdot b) + (c + i \cdot d)$	$= (a + c) + i \cdot (b + d)$
Subtraktion:	$(a + i \cdot b) - (c + i \cdot d)$	$= (a - c) + i \cdot (b - d)$
Multiplikation:	$(a + i \cdot b) \cdot (c + i \cdot d)$	$= ac - db + i \cdot (bc + ad)$
Division:	$\frac{1}{a+i\cdot b}$	$= \frac{a}{a^2+b^2} - i \cdot \frac{b}{a^2+b^2}$

Beispiel 3 Rechnen mit komplexen Zahlen Damit Sie einen Eindruck gewinnen können wie leicht und unbeschwert das Rechnen mit komplexen Zahlen ist, rechnen wir mal ein kleines Beispiel durch. Für die komplexe Zahl

$$c = 5 + i \cdot 3$$

ist

$$\mathrm{Re}(c) = 5 \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Im}(c) = 3\,.$$

Es sei

$$d = 2 - i \cdot 4$$

eine weitere komplexe Zahl, die wir auch umformulieren können zu

$$d = 2 + i \cdot (-4)\,.$$

Damit ist besser ersichtlich, dass

$$\mathrm{Re}(d) = 2 \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Im}(d) = -4$$

gilt.

Summation: $c + d = 5 + i \cdot 3 + 2 + i \cdot (-4) = 7 + i \cdot (-1) = 7 - i \cdot$

$\Rightarrow \quad \mathrm{Re}(c + d) = 7$ und $\mathrm{Im}(c + d) = -1$

Subtraktion: $c - d = 5 + i \cdot 3 - 2 + i \cdot 4 = 3 + i \cdot 7$

$\Rightarrow \quad \mathrm{Re}(c - d) = 3$ und $\mathrm{Im}(c - d) = 7$

Multiplikation:
$$\begin{aligned} c \cdot d &= (5 + i \cdot 3)(2 + i \cdot (-4)) \\ &= 10 + i \cdot (-14) + i^2 \cdot (-12) \\ &= 22 + i \cdot (-14) \\ &= 22 - i \cdot 14 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad \mathrm{Re}(c \cdot d) = 22$ und $\mathrm{Im}(c \cdot d) = -14$

Division:
$$\begin{aligned} \frac{c}{d} &= \frac{5 + i \cdot 3}{2 - i \cdot 4} \\ &= \frac{(5 + i \cdot 3)\overline{(2 - i \cdot 4)}}{(2 - i \cdot 4)\overline{(2 - i \cdot 4)}} \\ &= \frac{(5 + i \cdot 3)(2 + i \cdot 4)}{20} \\ &= \frac{10 + i \cdot 26 + i^2 \cdot 12}{20} \\ &= \frac{-2 + i \cdot 26}{20} \\ &= -\frac{1}{10} + i \cdot \frac{13}{10} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad \mathrm{Re}\left(\frac{c}{d}\right) = -\frac{1}{10}$ und $\mathrm{Im}\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{13}{10}$

Regel 7: weitere Zahlmengen:

Name	Schreibweise	Definition
positive reelle Zahlen:	$\mathbb{R}^+$	$:= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
nicht negative reelle Zahlen:	$\mathbb{R}_0^+$	$:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
negative reelle Zahlen:	$\mathbb{R}^-$	$:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$
nicht positive reelle Zahlen:	$\mathbb{R}_0^-$	$:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$
komplexe Zahlen:	$\mathbb{C}$	$:= \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R} \ \wedge \ i^2 = -1\}$

1.3 Potenz und Wurzel

Regel 8: Rechnen mit Potenzen: Seien $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}_0^+$ und $n\,,\ m \in \mathbb{N}^+$

ganzer Exponenten:

$$\begin{aligned} a^0 &:= 1 \qquad (a \neq 0) \\ a^{n+1} &:= a \cdot a^n \end{aligned}$$

rationaler Exponent:

$$\sqrt[n]{b} := b^{\frac{1}{n}}$$

Rechenregeln

$$\begin{aligned} a^{-n} &= \tfrac{1}{a^n} = \left(\tfrac{1}{a}\right)^n \\ a^{n+m} &= a^n a^m \\ (a^n)^m &= a^{nm} \\ a^{n^m} &= a^{(n^m)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{b^m} &= (b^m)^{\frac{1}{m}} = b^{\frac{m}{n}} \\ &= \left(b^{\frac{1}{n}}\right)^m = \sqrt[n]{b}^m \\ b^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{m}} &= b^{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}} = b^{\frac{m+n}{nm}} \\ &= \sqrt[nm]{b^{m+n}} \\ \left(b^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{m}}\right) &= b^{\frac{1}{n}}\left(1 + b^{\frac{1}{m}-\frac{1}{n}}\right) \end{aligned}$$

Bemerkungen

Für $n \neq 0$ ist $0^n = 0$. Während 0^0 ein unbestimmter Ausdruck ist.

Eine große Bitte:

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Wir können das leicht einsehen, wenn wir $a = b = 2$ einsetzen. Dann ist nämlich $2 = \sqrt{2+2} \neq \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2 \cdot \sqrt{2}$, denn $\sqrt{2} \neq 1$.

Und noch etwas:

Achten Sie auch besonders darauf:

$$(a^n)^m \neq a^{n^m}$$

Ein einfaches Beispiel soll Sie überzeugen:
Einerseits gilt $(2^3)^2 = 2^3 \cdot 2^3 = 2^{3+3} = 2^{2 \cdot 3} = 2^6 = 64$ und andererseits $2^{3^2} = 2^9 = 512$, nicht wahr?

1.4 Rasiermesserscharfe Logik: mathematische Aussagen

Die Mathematik hat nicht etwa deshalb eine Sprache entwickelt, um nur Wörter zu bilden, sondern um Aussagen treffen zu können. Was das ist aus mathematischer Sicht und wie diese zu treffen und zu verstehen sind wollen wir genauer betrachten.

Regel 9: Aussage:
Eine *Aussage* ist ein sinnvolles sprachliches Gebilde, das entweder wahr oder falsch ist.

Etwas anderes als wahr oder falsch wird nicht zugelassen. Aussagen kann man miteinander verknüpfen. Die Aussage dieser Verknüpfungen werden in Wahrheitstabellen definiert. Bevor wir uns eine solche Tabelle anschauen führen wir noch ein paar sprachliche Elemente ein. Es seien Aussagen A und B gegeben.

Regel 10: Verknüpfungen von Aussagen

	Schreibweise	Sprechweise
Negation:	$\neg A$	nicht A
Konjunktion:	$A \wedge B$	A und B
Alternative:	$A \vee B$	A oder B
Implikation:	$A \Rightarrow B$	aus A folgt B
Äquivalenz:	$A \Leftrightarrow B$	A ist äquivalent zu B

Die *Negation* einer Aussage A beinhaltet, salopp gesagt die "minimalste" Störung, die dazu führt, die Aussage A falsch zu machen. Nehmen wir ein Beispiel: Wir treffen die Aussage: "Alle Autos in Winterthur sind rot." Die Negation dieser Aussage ist dann "Es gibt ein Auto in Winterthur, das nicht rot ist."

Regel 11: Aussage verknüpfter Aussagen

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
W	W	F	W	W	W	W
W	F	F	F	W	F	F
F	F	W	F	F	W	W
F	W	W	F	W	W	F

Aus der Wahrheitstabelle können wir logische Regeln erstellen:

$$
\begin{aligned}
\neg\neg A &= A && \text{Doppelte Verneinung}\\
(A \Rightarrow B) &= (\neg A \vee B) = (\neg B \Rightarrow \neg A) && \text{Ersetzen der Implikation}\\
(A \Leftrightarrow B) &= ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)) && \\
&= \neg(\neg A \Leftrightarrow B) && \text{Ersetzen der Äquivalenzrelation}\\
\neg(A \wedge B) &= \neg A \vee \neg B && \text{de Morgansche Regeln}\\
\neg(A \vee B) &= \neg A \wedge \neg B && \text{de Morgansche Regeln}\\
\neg(A \Rightarrow B) &= A \wedge \neg B && \text{Verneinung der Implikation}\\
\neg(A \Leftrightarrow B) &= (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) && \text{Verneinung der Äquivalenzrelation}
\end{aligned}
$$

Die Aussagenlogik ist unentbehrlich bei der mathematischen Beweisführung. Eine Aussage der Form

A:="Es gibt (mindestens) ein Auto in Winterthur, das rot ist."

ist auf direktem Weg meist schwer zu beweisen. Gewöhnlich geht man dabei so vor, dass man die Negation davon annimmt und dies zu einem Widerspruch führt. Man nimmt also an es gelte $\neg A$:

$\neg A$ = "Alle Autos in Winterthur sind rot."

Wenn man diese Annahme zu einem Widerspruch führen kann, was meist dadurch erreicht wird, dass man einfach ein Gegenbeispiel findet, so folgt, dass $\neg A$ falsch ist, was direkt dazu führt, dass die Aussage A wahr ist. In diesem Fall wird sich ein Gegenbeispiel finden lassen, indem man einfach aus dem Fenster schaut.

Übrigens: Jede Aussage über die leere Menge ist wahr!

Wir wollen uns im folgenden mit drei wesentlichen Beweismethoden beschäftigen.

Regel 12: Beweismethoden

1. direkter Beweis
2. indirekter Beweis
3. vollständige Induktion

Beim *direkten Beweis* verfährt man "straight forward" salopp gesagt. Der *indirekte Beweis* funktioniert so, dass man zunächst die Negation der Aussage annimmt und diese dann zu einem Widerspruch führt, woraufhin die ursprüngliche Aussage Gültigkeit erhällt. Der dritten Beweismethode, dem sogenannte *Beweis durch Vollständige Induktion* widmen wir das folgende Unterkapitel, Kapitel 1.5 und werden auch erst dort genauer darauf eingehen.

Wir erinnern uns an die Aussage aus Kapitel 1.2, dass $\sqrt{2}$ nicht durch eine rationale Zahl beschrieben werden kann. Das wollen wir nun beweisen und formulieren den

Satz 1.1. *Für p, q mit $q \neq 0$ gilt:*

$$\left(\sqrt{2} = \frac{p}{q}\right) \Rightarrow (p \notin \mathbb{Z} \vee q \notin \mathbb{Z})$$

Um diesen Satz zu beweisen, benötigen wir folgende Aussagen, die wir dehalb vorweg formulieren, damit wir sie dann im Beweis verwenden können.

Hilfssatz 1.2. *Für $n \in \mathbb{Z}$ gilt:*

1. *Ist n gerade so ist n^2 ebenfalls gerade.*
2. *Ist n ungerade so ist n^2 ebenfalls ungerade.*

Wir wollen uns davon überzeugen:

Beweis Hilfssatz 1.2:

Zu 1.: Was wir zeigen wollen hat die folgende Aussagenstruktur. Sei $n \in \mathbb{Z}$. Mit

$$A := n \text{ ist gerade und}$$
$$B := n^2 \text{ ist gerade}$$

gilt

$$A \Rightarrow B\,.$$

□

Das ist so einfach, dass wir den Beweis ohne Umstände direkt durchführen können. Wir nennen ihn deshalb "direkten Beweis". Eine gerade Zahl n kann dargestellt werden als $n = 2k, k \in \mathbb{Z}$. Dann ist

$$(2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$$

selbstverständlich wieder eine gerade Zahl, da sie immer noch durch zwei teilbar ist.

Zu 2.: Diese Aussage beweisen wir analog zur ersten: Sei $k = 2n + 1$. Dann ist

$$(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = \underbrace{2(k^2 + 2k)}_{\text{gerade Zahl}} + 1$$

eine ungerade Zahl, womit beide Aussagen bewiesen sind.

Nun kommen wir zum Beweis des Satzes.

Beweis Satz 1.1:

Eine übliche Vorgehensweise bei der Beweisführung ist der sogenannte "indirekte Beweis". Man nimmt einfach die Negation an und führt dies zu einem Widerspruch.

Wie sieht das formal aus? Wir haben zwei Aussagen:

$$A := \left(\sqrt{2} = \frac{p}{q}\right)$$
$$B := (p \notin \mathbb{Z} \vee q \notin \mathbb{Z})$$

unter der Voraussetzung (!), dass $q \neq 0$ wollen wir foldende Behauptung zeigen:

$$A \Rightarrow B \tag{1}$$

Wir nehmen die Negation an. Also Annahme: Es gilt

$$A \wedge \neg B. \tag{2}$$

Schauen wir zunächst mal was $\neg B$ genau ist:

$$\begin{aligned}\neg B &= \neg\,(p \notin \mathbb{Z} \vee q \notin \mathbb{Z})\\ &= \neg\,(p \notin \mathbb{Z}) \wedge \neg\,(q \notin \mathbb{Z})\\ &= (p \in \mathbb{Z}) \wedge (q \in \mathbb{Z})\\ &= p, q \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Gleichung (2) kann ersetzt werden durch

$$\left(\sqrt{2} = \frac{p}{q}\right) \wedge p, q \in \mathbb{Z} \tag{3}$$

Können wir die Aussage in (3) zu einem Widerspruch führen so gilt die ursprüngliche, zu beweisende Aussage (1).

Wir nehmen also an, dass es eine rationale Zahl gibt, die Wurzel aus zwei darstellen kann. Die rationale Zahl sei so dargestellt, dass $\frac{p}{q} \in \mathbb{Z}, q \neq 0$ gekürzt ist. Das kann man ja immer machen.

$$\begin{aligned} && \sqrt{2} &= \frac{p}{q}\\ \Leftrightarrow && 2 &= \frac{p^2}{q^2}\\ \Leftrightarrow && 2q^2 &= p^2\end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass p^2 eine gerade Zahl ist. Mit Hilfssatz 1.2 gilt auch dass p eine gerade Zahl ist. Wir definieren $r := \frac{p}{2}$, was wieder eine ganze Zahl sein muss und setzen diese für p ein. Dann gilt weiter

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow && 2q^2 &= 4r^2\\ \Leftrightarrow && q^2 &= 2r^2\end{aligned}$$

was bedeutet, dass auch q eine gerade Zahl ist. Dies steht im Widerspruch zur Annahme, dass p und q keinen gemeinsamen Teiler haben. Wir haben unsere Rechnungen also erfolgreich auf einen Widerspruch geführt, was die Schlußfolgerung erlaubt, dass die negierte Aussage falsch und demzufolge die eigentliche Aussage (1) wahr ist.

□

1.5 Vollständige Induktion

Wir haben bereits die Beweismethoden "direkter Beweis" und "indirekter Beweis" kennengelernt. Nun wollen wir uns der Beweismethode der *Vollständigen Induktion* widmen. Das Grundprinzip ist ganz einfach: Denken Sie an Dominosteine. Sie wissen, wenn ein Stein umgestoßen wird so wird dieser den nächsten Stein ebenfalls zu Fall bringen. Das ist zunächst ein reines Wissen, ohne, dass ein Stein wirklich fällt. Dies nennt man den *Indutionsschritt*. Wenn Sie nun einen Stein wirklich antippen und zu Fall bringen, so ist Ihnen aufgrund der Kettenreaktion, bzw. des Induktionsschrittes klar, dass alle Steine umfallen werden. Das Starten dieses Prozesses nennen wir *Induktionsanfang*.

In anderen Worten: Wenn die Aussage $A(1)$ gilt und wir gezeigt haben, dass $A(k) \Rightarrow A(k+1)$ gilt und zwar für alle $k \in \mathbb{N}$, so folgt, dass auch $A(2)$ gilt, denn wir haben gezeigt, dass $A(1) \Rightarrow A(2)$ gilt. Wenn $A(2)$ gilt, so folgt, dass auch $A(3)$ gilt und so weiter.

Zeile	$A(k)$	$A(k+1)$	$A(k) \Rightarrow A(k+1)$
1	W	W	W
2	W	F	F
3	F	W	W
4	F	F	W

Der Beweis besteht im Grunde aus zwei Teilen. Erinnern Sie sich zunächst mal an das profane Beispiel "Es regnet, folglich ist die Straße nass". Wenn Sie

Es regnet $\Rightarrow$ die Straße ist nass

zeigen können sind Sie bei der obigen Wahrheitstabelle in einer der Situation von Zeile 1, 3 oder 4. Wenn Sie also diese Folgerung bewiesen haben, haben Sie noch lange nicht bewiesen, dass es regnet, auch nicht dass die Straße nass ist. Sie haben lediglich gezeigt, dass für den Fall, dass es regnet die Straße dann nass sein wird. Wenn Sie also eigentlich zeigen wollen, dass die Straße nass ist, müssen Sie noch zusätzlich beweisen, dass es regnet. Dann sind Sie in der Wahrheitstabelle in der Zeile 1 gelandet! Et voilà!

Will man zeigen, dass eine Aussage $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ richtig ist, muss man beweisen, dass die Aussage für einen Startwert, etwa $n = 1$ richtig ist und dass man von $n = k$ auf $n = k + 1$ schließen kann. (Die Aussage $A(n)$ könnte zum Beispiel sein: Der Dominostein mit Nummer n fällt.)

Wir formulieren das ordentlich:

Regel 13: Vollständige Induktion: $\forall n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ ist eine Aussage über $n \in \mathbb{N}$. Wenn gilt:

$A(1)$	ist wahr und	*(Induktionsvoraussetzung)*
$A(k) \Rightarrow A(k+1)$	ist wahr,	*(Induktionsschritt)*

dann gilt: $\forall n \in \mathbb{N} \; : \; A(n)$ ist eine wahre Aussage.

Beispiel 4 Vom "kleinen Gauß"

Wir wollen zeigen, dass

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

gilt; und das per Vollständiger Induktion (klar). Also:

Beweis durch Vollständige Induktion:

Behauptung $\forall n \in \mathbb{N} \; :$

$$1+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Induktions–anfang Die Aussage gilt für $n = 1$:

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} \qquad \checkmark$$

Induktions–voraussetzung Die Behauptung gelte für $n = k$:

$$A(k): \qquad 1+2+3+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2} \tag{4}$$

Induktions–schritt

$$A(k) \Rightarrow A(k+1)$$

mit

$$A(k+1): \qquad 1+2+3+\cdots+k+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \tag{5}$$

Induktions–beweis

Hier geht man typischerweise so vor, dass man mit der linken Seite der Aussage $A(k+1)$ startet, so umformuliert, so dass man die Gleichung (4) einsetzen kann. Umformulierungen führen dann auf die rechte Seite in Gleichung (5), womit die Gleichheit in (5) unter der Annahme, dass $A(k)$ wahr ist, gilt.

$$\begin{aligned}
1+2+3+\cdots+k+(k+1) &= 1+2+3+\cdots+k+(k+1) \\
&= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) \\
&= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} \\
&= \frac{(k+1)(k+2))}{2}
\end{aligned}$$

□

Regel 14: Struktur der vollständigen Induktion:

Aussage:

Voraussetzungen	
Behauptung:	$A(n)$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

Beweis: (vollständige Induktion)

Induktionsanfang:	Prüfe $A(1)$!
Induktionsannahme:	Gelte $A(k)$ für ein $k \in \mathbb{N}$.
Induktionsschritt:	Zeige: $A(k) \Rightarrow A(k+1)$

Für die Aussage (die offensichtlich falsch ist)

$$1+2+\cdots+n < \frac{n(n+1)}{2}$$

läßt sich der Induktionsschritt $A(k) \Rightarrow A(k+1)$ auch zeigen. Aber $A(1)$ ist nicht wahr.

Die Aussagenkette muss nicht bei $n = 1$ beginnen. Wenn $A(1)$ nicht wahr ist, aber $A(2)$ und der Induktionsschritt gezeigt werden kann, so gilt die Aussage eben für alle $n \geq 2$.

Wir wollen noch ein Beispiel rechnen

Beispiel 5 Bernoullische Ungleichung

Behauptung $\forall n \in \mathbb{N}\, \forall x \geq -1\ :$

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

Induktions–anfang

$$(1+x) \geq 1 + x$$

Induktions–voraussetzung $k \in \mathbb{N}\ \wedge\ x \geq -1:$

$$A(k): \qquad (1+x)^k \geq 1 + kx$$

Induktions–schritt $A(k) \Rightarrow A(k+1)$ mit

$$A(k+1): \qquad (1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x$$

Induktions–beweis

$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1} &= (1+x)^k(1+x)\\ &\geq (1+kx)(1+x)\\ &= 1 + (k+1)x + kx^2\\ &\geq 1 + (k+1)x\end{aligned}$$

denn $kx^2 \geq 0$. (Und? warum muss jetzt $x \geq -1$ sein? Hm?) □

Typischerweise sind Aussagen, die per Vollständiger Induktion bewiesen werden von der Form n–facher Summen oder Produkte. Etwa wie im Beispiel 4. Die "Pünktchen"–Darstellung $1 + \cdots + n$ ist in der Mathematik aus gutem Grund nicht gerne gesehen. Stellen Sie sich einmal vor wie Sie die Summe aus den Dezimalzahlen

$$0.\bar{9} = 0.9999\cdots$$

und

$$0.\bar{1} = 0.1111\cdots$$

berechnen sollen. Wenn man es schafft, sich der Pünktchen zu entledigen, kann man berechnen, dass die Summe dieser beiden Zahlen gerade $\frac{10}{9} = 1.1111\cdots$ ist. Ist dann etwa $0.9999\cdots = 1$? Wir werden es in Aufgabe **??** (Kapitel 2.1) untersuchen. Doch zunächst führen wir noch zwei neue, sehr nützliche Zeichen ein. Das ist zum einen das Summenzeichen $\sum$ (siehe Regel 15) und das Produktzeichen $\prod$ (siehe Regel 16).

Regel 15: Das Summenzeichen: Für $m, n, k \in \mathbb{Z}$, $a_k \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n \qquad \text{für } m \leq n$$

Sprich: "Summe der a_k von k gleich m bis n". Ist $k > m$ so definieren wir

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := 0 \qquad \text{für } m > n\,.$$

Rechenregeln: Sei stets $m \leq n$. Dann gilt:
Summe/Differenz:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k \pm \sum_{k=m}^{n} b_k = \sum_{k=m}^{n} (a_k \pm b_k)$$

Produkt mit einem Skalar ($c \in \mathbb{R}$):

$$\sum_{k=m}^{n} c\, a_k = c \sum_{k=m}^{n} a_k$$

Indexverschiebung:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m+p}^{n+p} a_{k-p} = \sum_{k=m-p}^{n-p} a_{k+p}$$

Teleskopsummen:

$$\sum_{k=m}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_{m-1}$$

Beispiel 6 Teleskopsumme Wir wollen die Summe

$$\sum_{k=1}^{999} \frac{1}{k(k+1)}$$

auswerten. Ohne Computer scheint das auf den ersten Blick ein wenig mühsam zu sein. Wir müssen ein wenig umformen. Zunächst machen wir aus dem komplizierten Term $\frac{1}{k(k+1)}$ zwei einfache:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} = \frac{k(a+b)+a}{k(k+1)} \underset{a\,=\,1}{\overset{b\,=\,-a}{=}} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

Nun können wir die Summe umformen zu

$$\sum_{k=1}^{999} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{999} \Big(\underbrace{\frac{1}{k}}_{=:a_k} - \underbrace{\frac{1}{k+1}}_{=:a_{k+1}} \Big)$$

Nach Aufgabe ?? gilt für Teleskopsummen dieser Form

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{999} (a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{1000} \\ &= 1 - \frac{1}{10^4} = \frac{999}{10^4} = 0.999 \end{aligned}$$

Insegesamt haben wir berechnet, dass

$$\boxed{\sum_{k=1}^{999} \frac{1}{k(k+1)} = 0.999}$$

Hätten Sie das Ergebnis vermutet?

Das Produktzeichen wird uns nicht gar so häufig begegnen wie das Summenzeichen, aber dennoch, der Vollständigkeit wegen und wo wir gerade dabei sind:

Regel 16: Das Produktzeichen: Für $m, n \in \mathbb{Z}$, $a_k \in \mathbb{R}$

$$\prod_{k=m}^{n} a_k := a_m \cdot a_{m+1} \cdots a_n \qquad \text{für } m \leq n$$

Sprich: "Das Produkt über die a_k von k gleich m bis n". Auch hier erklären wir die Situation

$$\prod_{k=m}^{n} a_k := 1 \qquad \text{für } m > n\,.$$

Indexverschiebung:

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = \prod_{k=m-p}^{n-p} a_{k+p}$$

Teleskopprodukt:

$$\prod_{k=m}^{n} \frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{a_n}{a_{m-1}}$$

1.6 Die Binomische Formel

Wir wollen in diesem Kapitel eine Formel für die Berechnung von

$$(a+b)^n$$

für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ kennen lernen.

$$
\begin{array}{lcccccccccc}
(a+b)^0 & = & & & & & 1 & & & & \\
(a+b)^1 & = & & & & a & + & b & & & \\
(a+b)^2 & = & & & a^2 & + & 2ab & + & b^2 & & \\
(a+b)^3 & = & & a^3 & + & 3a^2b & + & 3ab^2 & + & b^3 & \\
(a+b)^4 & = & a^4 & + & 4a^3b & + & 6a^2b^2 & + & 4ab^3 & + & b^4 \\
\vdots & & & & & & & & & & \\
(a+b)^n & = & ? & & & & & & & &
\end{array}
$$

Die koeffizienten der einzelnen Summanden werden im sogenannten Pascalschen Dreieck dargestellt:

Regel 17: Das Pascalsche Dreieck:

$$
\begin{array}{c|ccccccccccc}
n & & & & & & & & & & & \\
\hline
0 & & & & & & 1 & & & & & \\
1 & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\vdots & & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

Diese Darstellung läßt die Vermutung aufkommen, dass man die Berechnung von $(a+b)^n$ in eine allgemeinene Form fassen kann. Es könnte also eine Formel geben. Dazu benötigen wir erst noch etwas mehr aus dem Potpourri des mathematischen Handwerkkastens:

Regel 18: Fakulät: Sei $n \in \mathbb{N}_0$

$$
\begin{aligned}
n! &:= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = \textstyle\prod_{j=1}^{n} j \\
0! &:= 1
\end{aligned}
$$

Regel 19: Binomialkoeffizient: Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$ und $n \geq k$. Dann definieren wir die Binomialkoeffizienten wie folgt:

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Aus der Definition der Binomialkoeffizienten folgt direkt, dass

$$\binom{n}{0} = 1\,, \quad \binom{n}{n} = 1 \quad \text{und} \quad \binom{n}{k} = 0 \quad \text{für } n < k$$

gilt. Letzteres können wir leicht einsehen, wenn wir eine kleine Umformulierung vornehmen und zwar dergestallt, dass $n < k$ überhaupt zulässig ist: Es ist

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(n-j)\,, \tag{6}$$

denn

$$\begin{aligned} n! &= 1\cdot 2\cdots(n-1)\cdot n \\ &= \underbrace{1\cdots(n-k)}_{=(n-k)!}\cdot(n-k+1)\cdots(n-1)\cdot n \\ &= (n-k)!\cdot(n-k+1)\cdots(n-1)\cdot n \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \frac{n!}{k!(n-k)!} &= \frac{(n-k)!\cdot(n-k+1)\cdots(n-1)\cdot n}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{(n-k+1)\cdots(n-1)\cdot n}{k!} \\ &= \frac{1}{k!}((n-0)(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))) \\ &= \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(n-j)\,. \end{aligned}$$

Die Darstellung in (6) hat gegenüber der Darstellung in Regel 19 den Vorteil, dass Sie dann auch Werte $n < k$ einsetzen können. Sie werden dabei aber feststellen, dass das Ergebnis immer Null ist. Wozu das also? Die Variante in (6) kommt dann zum Einsatz, wenn wir $n \in \mathbb{R}$ zulassen wollten. Wir werden uns aber auf $n \in \mathbb{N}$ beschränken und halten lediglich fest, dass unter bestimmten Voraussetzungen die Binomialkoeffizienten verschwinden.

š bla

Die Werte der Binomialkoeffizienten kann man auch direkt aus dem Pascalschen Dreieck ablesen. So ist etwa der Wert von $\binom{5}{3}$ in der 5–ten Zeile des Pascalschen Dreiecks (Regel 17) zu finden, wenn man 4 Schritte nach rechts läuft. Oder allgemein: Der Wert von $\binom{n}{k}$ befindet sich im Pascalschen Dreieck in der n–ten Zeile auf Position $k+1$. Wir gehen davon aus, dass $n \geq k$ ist. Andernfalls ist der Wert immer 0.

Nun wollen wir endlich die Binomialkoeffizienten verwenden, um $(a+b)^n$ darzustellen:

Regel 20: Binomische Formel: Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \, .$$

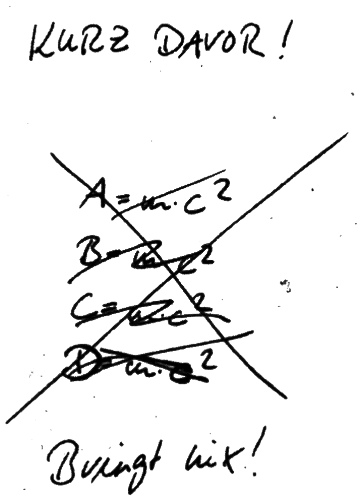
Der Beweis ergibt sich aus rein kombinatorischen Betrachtungen:

$$\begin{aligned}(a+b)^n = \\ &\binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \cdots \\ &\qquad + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n\end{aligned}$$

Folgen und Reihen 2

Wir behandeln:

- Aufzählen bis in's Unendliche ...
- ... und dann summieren wir das noch auf.
- Woher kommt die Eulersche Zahl ...
- und was hat sie mit Wachstum zu tun?



2.1 Folgen und Grenzwerte

Die Tante bringt dem Kind eine Tafel Schokolade. Weil es sich lange Zeit an der Süßigkeit erfreuen will halbiert es die Tafel und verwahrt eine Hälfte für den kommenden Tag auf. Am nächsten Tag will es die Tafel wieder nicht aufessen und halbiert sie wieder. Es hat nun jeden Tag weniger Schokolade aber immer noch was übrig für den nächsten Tag.

Schokoladenvorrat	1	0.5	0.25	0.125	0.0625	0.03125	0.015625	$\cdots$	2^{-n+1}
am Tag	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$	n

Abbildung 2.1 stellt graphisch dar, wie sich der Schokoladenvorrat des Kindes entwickelt. Theoretisch kann es beliebig lange einen Vorrat beibehalten, da dieser sich erst im Unendlichen auflösen wird. Die Folge, die den aktuellen Anteil der Schokoladentafel an einem bestimmten Tag n beschreibt könnten wir etwa so definieren:

$$a_n := \frac{1}{2^{n-1}} \tag{7}$$

Die so gewählte Darstellung nennt man eine *(reelle) Folge*. Generell bezeichnet man mit einer Folge eine Abbildung die natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$ (oder auch $\mathbb{N}_0$) in die Menge der rellen Zahlen $a_n \in \mathbb{R}$ abbildet. Wir schreiben

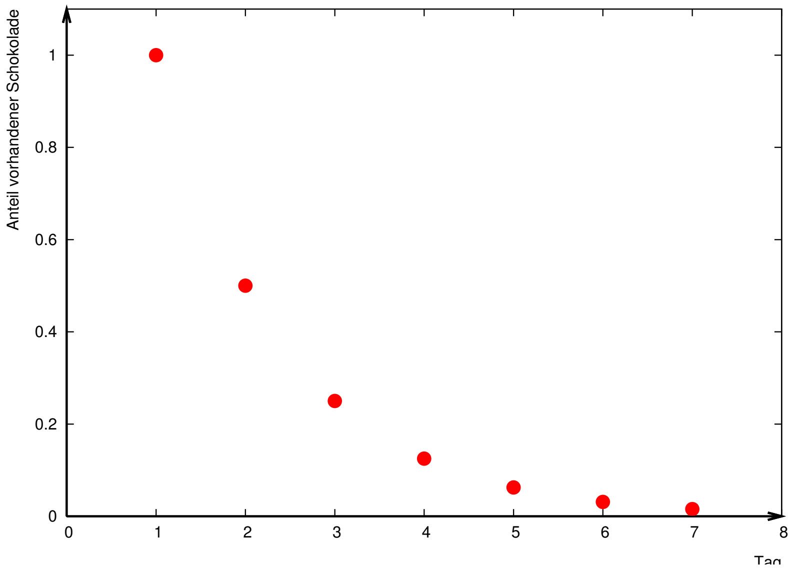


Abbildung 1: Schokoladeneinteilung eines Kindes

Regel 21: Folgen:

$$a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \quad (n \in \mathbb{N} \text{ und } a_n \in \mathbb{R})$$

oder $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

oder auch kurz $\langle a_n \rangle$

Die Zahlen a_n heißen *Glieder* der Folge.

Es gibt verschiedene Darstellungsmöglichkeiten von Folgen:

Regel 22: Darstellung von Folgen:

Darstellungsart	Beispiel
explizit	$a_n = 2\,n - 1$
implizit (auch rekursiv)	$a_1 = 1$ $a_{n+1} = a_n + 2$
aufzählend	$1, 3, 5, 7, 9, \ldots$

Aus einer expliziten Darstellung läßt sich immer eine implizite ableiten. Die Umkehrung gilt allerdings nicht.

Beispiel 7 Von explizit zu implizit Wir erzeugen alle ungeraden Zahlen aus $\mathbb{N}$ durch

$$\begin{aligned} & a_n = 2\,n - 1\,. \\ \Rightarrow \quad & a_{n-1} = 2\,n - 3 \\ \Rightarrow \quad & a_n - a_{n-1} = 2 \\ \Rightarrow \quad & a_n = a_{n-1} + 2 \end{aligned}$$

Beispiel 8 Von implizit zu explizit Manchmal ist es möglich die implizite Darstellung in eine explizite umzuformulieren. Nehmen wir wieder obiges Beispiel und betrachten die Folge in impliziter Darstellung:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_n &= a_{n-1} + 2 \end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned} & a_n = a_{n-1} + 2 \\ \Leftrightarrow \quad & a_n - a_{n-1} = 2 \end{aligned}$$

Die Folge hat eine "Steigung" von 2, was bedeutet, dass sie von der Form

$$a_n = 2\,n + m$$

ist. Wir müssen noch m bestimmen. Dazu verwenden wir den Startwert der Folge $a_1 = 1$. damit gilt

$$\begin{aligned} & a_1 = 2 \cdot 1 + m = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & m = -1 \\ \Rightarrow \quad & a_n = 2\,n - 1 \end{aligned}$$

Die aufzählende Darstellung ist

$$1, 3, 5, 7, \ldots$$

also gerade die ungeraden Zahlen.

Regel 23: spezielle Folgen:
Arithmetische Folgen: Je zwei aufeinanderfolgende Folgenglieder unterscheiden sich durch einen konstanten Wert:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + c \\ &= a_{n-1} + 2c \\ &\vdots \\ &= a_1 + n\,c \end{aligned}$$

Geometrische Folgen: Der Quotient von je zwei aufeinanderfolgenden Folgengliedern ist konstant:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1\,q \\ a_3 &= a_2\,q = a_1\,q^2 \\ &\vdots \\ a_{n+1} &= a_1\,q^n \end{aligned}$$

Alternierende Folge: Diese Folgen haben die Eigenschaft, dass sie nicht kontinuierlich steigen oder fallen sondern "hin– und herspringen". Meist ist dafür ein Ausdruck der Form $(-1)^n$ verantwortlich, so dass die Folge die Form

$$a_n = (-1)^n \star \text{irgendeine Folge}$$

hat.

Harmonische Folge:

$$a_n = \frac{1}{n}$$

Fibonacci Folge:

$$\begin{aligned} &a_1 = 1, \quad a_2 = 1 \\ &a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \end{aligned}$$

Beispiel 9 Beispiele von Folgen

$$
\begin{array}{llll}
(a) & a_n = n^2 & \{1, 4, 9, 16, \dots\} \\
(b) & a_n = (-1)^n & \{-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots\} \\
(c) & a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) & \{2, 1.5, 1.\bar{3}, 1.25, 1.2, 1.1\bar{6}, 1.1428\dots, 1.125, 1.\bar{1}, 1.1, \dots\}
\end{array}
$$

Die Beispiele sind in Abbildung 9 graphisch dargestellt. Was fällt Ihnen auf?

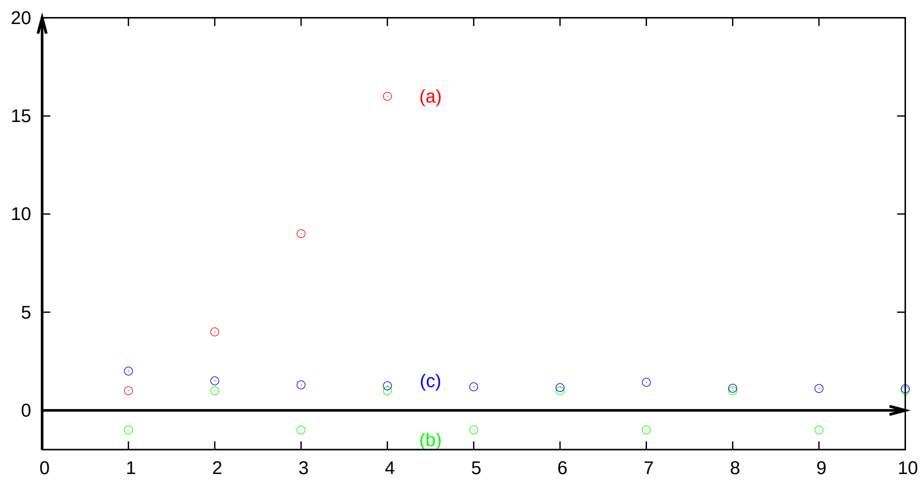


Abbildung 2: Folgenbeispiele

Regel 24: Grenzwert: Eine Zahl a heißt *Grenzwert* der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\Leftrightarrow$

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n \geq n_0 : \; |a_n - a| < \epsilon \, .$$

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *konvergent*, wenn sie einen Grenzwert besitzt. Schreibweise:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

Andernfalls nennen wir sie *divergent*.

Eine Folge besitzt höchstens einen Grenzwert, oder anders formuliert: Eine konvergente Folge besitzt genau einen Grenzwert.

Beispiel 10

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \stackrel{!}{=} 0$$

Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Dann gilt

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad n > \frac{1}{\epsilon}\,.$$

Wähle ein $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$ dann ist für alle $n > n_0$ die Bedingung für Konvergenz erfüllt.

Beispiel 11 Für die Folgen aus Beispiel 9 gilt: (a) und (c) sind divergent und (b) ist konvergent.

Beispiel 12 $\sqrt{2}$ Es sei die Folge

$$\begin{aligned} a_1 &= 1\,, \\ a_{n+1} &= \frac{2+a_n}{1+a_n} \end{aligned}$$

gegeben. Wir wollen sie auf Konvergenz (was sonst?) untersuchen. Verschaffen wir uns zunächst eine Idee davon, wie der Grenzwert aussehen könnte, wenn es denn einen gibt, indem wir einfach mal ein paar Werte einsetzen:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= \frac{2+a_1}{1+a_1} = \frac{2+1}{1+1} = \frac{3}{2} = 1.5 \\ a_3 &= \frac{2+a_2}{1+a_2} = \frac{2+\frac{3}{2}}{1+\frac{3}{2}} = \frac{7}{5} = 1.4 \\ a_4 &= \frac{2+a_3}{1+a_3} = \frac{2+\frac{7}{5}}{1+\frac{7}{5}} = \frac{17}{12} = 1.45 \\ a_5 &= \frac{2+a_4}{1+a_4} = \frac{2+\frac{17}{12}}{1+\frac{17}{12}} = \frac{41}{29} = 1.413\ldots \\ &\vdots \\ &? \end{aligned}$$

Allem Anschein nach läuft diese Folge auf $\sqrt{2}$ zu. Nehmen wir das doch einfach mal an und prüfen, ob dem so ist:

$$
\begin{aligned}
|a_{n+1} - \sqrt{2}| &= \left| \frac{2 + a_n}{1 + a_n} - \sqrt{2} \right| = \left| \frac{a_n - \sqrt{2}a_n + 2 - \sqrt{2}}{1 + a_n} \right| \\
&= \left| \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + a_n}(a_n - \sqrt{2}) \right| \le \frac{1}{2}|a_n - \sqrt{2}| \\
&\vdots \\
&\le \left(\frac{1}{2}\right)^n |a_1 - \sqrt{2}| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \to 0
\end{aligned}
$$

Et voilá: damit gilt dann auch

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}\,.$$

$\square$

Erinnern Sie sich an die Überlegungen, die wir in Kapitel 1.2 bezüglich der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ angestellt hatten? Wenn wir rationale Zahlen mit Addition, Subtraktion, Multiplikation oder Division verknüpfen so erhalten wir wieder rationale Zahlen. Hm. Das ist schon richtig so lange wir keinen Grenzübergang machen. Die Folgenvorschrift $a_{n+1} = \frac{2+a_n}{1+a_n}$ mit einer rationalen Zahl als Startwert, nämlich $a_1 = 1$ liefert stets wieder eine rationale Zahl. Der Grenzwert ist allerdings eine irrationale Zahl, nämlich $\sqrt{2}$. Wir haben mit Sazt 1.1 bewiesen, dass dies keine rationale Zahl ist![2]

[2]Dieses Verfahren wird auch von Compilern und Taschenrechnern verwendet, um die Wurzel zu berechnen. Auch beim Design von Halbleiterchips muss auf solche Hilfsmittel zugegriffen werden. Das Verfahren gibt es in allgemeinerer Form für verschiedene Wurzelausdrücke und nennt sich "Heron–Verfahren".

Regel 25: Rechenregeln für konvergente (!) Folgen: Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen, so gilt

- $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und
$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n \,.$$
- $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und
$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n \,.$$
- Ist $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$ so gibt es ein n_0, so dass $b_n \neq 0$ für $n \geq n_0$. Dann gilt $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} \,.$$

Regel 26: Eigenschaften von Folgen: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge.

1. **Monotonie:** Eine Folge ist monoton wachsen (fallend):⇔
$$a_n \geq a_{n-1} \quad (a_n \leq a_{n-1}) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$
($\neq$ für strenge Monotonie)
2. **Beschränkheit:** Eine Folge ist nach oben (unten) beschränkt: ⇔
$$\exists\, c \in \mathbb{R}: \; a_n \leq c \quad (a_n \geq c) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$
3. **Monotoniekriterium:** Ist eine Folge monoton wachsend (fallend) und nach oben (unten) beschränkt so ist sie konvergent und besitzt genau einen Grenzwert.

Im folgenden Unterkapitel werden wir dem Grenzwert einer sehr wesentlichen Folge mit Monotonie und Beschränktheit auf die Schliche kommen.

2.2 Die Eulersche Zahl

Stellen Sie sich vor, Sie legen einen CHF bei der Bank "Sparnase" an. Diese Bank bietet Ihnen einen Jahreszins von sage und schreibe 10%.

Dann sieht die Entwicklung Ihres Reichtums in Jahren so aus:

Jahr	0	1	2	3	$\cdots$	n
Guthaben	1	$1+0.1$	$(1+0.1)^2$	$(1+0.1)^3$	$\cdots$	$(1+0.1)^n$

Kurzum: Sie besitzen nach einem Jahr ganze 1.1 CHF. Allgemein lautet ihre Sparformel (p=Zinssatz, k=Anzahl Jahre, 1=Startguthaben):

$$(1+p)^k$$

Nun finden Sie eine andere Bank "Superschlausparbank". Diese bietet den gleichen Jahreszinssatz, allerdings mit monatlicher Zinsausschüttung. Sie starten wieder mit einem CHF:

Monat	0	1	2	$\cdots$	12	$\cdots$	k Jahre
Guthaben	1	$1+\frac{0.1}{12}$	$(1+\frac{0.1}{12})^2$	$\cdots$	$(1+\frac{0.1}{12})^{12}$	$\cdots$	$(1+\frac{0.1}{12})^{12\,k}$

Bei dieser Bank besitzen Sie nach einem Jahr bereits ungefähr 1.1047 CHF (wie auch immer gerundet wird). Schon besser. Ihre Sparformel lautet nun (p=Zinssatz, k=Anzahl Jahre, 1=Startguthaben)

$$\left(1+\frac{p}{12}\right)^{12\,k}$$

Die Vermutung liegt nun nahe, dass Sie Ihren Gewinn erhöhen, je öfter im jahr die Zinsausschüttung stattfindet. Machen wir nun ein kleines Gedankenspiel: Angenommen Sie finden eine Bank mit den für Sie optimalsten Bedingungen, nämlich einen Jahreszinssatz von 100%, der kontinuierlich, sprich unendlich oft pro Jahr ausgezahlt wird. Das wäre doch was! Was meinen Sie? Werden Sie dann nach einem Jahr unendlich reich sein? [3] Die Fragestellung, mathematisch formuliert wäre also

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = ?$$

Untersuchen wir also die Folge auf Monotonie und Beschränktheit.

Satz 2.1. *Es sei $n \in \mathbb{N}$. Die Folge*

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \tag{8}$$

ist konvergent.

Um diesen Satz zu beweisen, ist folgender Hilfssatz sehr nützlich:

Hilfssatz 2.2. *Für $m, n, k \in \mathbb{N}$ mit $m < n \le k$ gilt*

$$\frac{1}{m^k}\binom{m}{k} \overset{(1)}{<} \frac{1}{n^k}\binom{n}{k} \overset{(2)}{<} \frac{1}{k!} \overset{(3)}{\le} \frac{1}{2^{k-1}}\,.$$

[3] Jakob Bernoulli (1655 - 1705) war ein schweizer Mathematiker an der Universität in Basel. Er formulierte 1689 das Problem der stetigen Verzinsung.

Beweis Hilfssatz 2.2:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m^k}\binom{m}{k} &= \frac{1}{m^k}\frac{m!}{k!(m-k)!} \\
&= \frac{1}{m^k}\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)}{k!} \\
&= \frac{1}{k!}\frac{m}{m}\frac{(m-1)}{m}\frac{(m-2)}{m}\cdots\frac{(m-k+1)}{m} \\
&= \frac{1}{k!}\,1\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{m}\right) \\
&\overset{(1)}{<} \frac{1}{k!}\,1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\underbrace{\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}_{\in(0,1)} \\
&\overset{(2)}{<} \frac{1}{k!} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k} \leq \frac{1}{\underbrace{2\cdots 2}_{(k-1)mal}} \overset{(3)}{=} \frac{1}{2^{k-1}}
\end{aligned}$$

$\square$

Beweis Satz 2.1:

Damit können wir jetzt arbeiten: Wir zeigen zunächst, dass unsere Folge (8) monoton wachsend ist. Es sei $m < n$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{m}\right)^m &\underset{Formel}{\overset{Binomische}{=}} \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\left(\frac{1}{m}\right)^k = \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{m^k}\binom{m}{k} \underset{HS\ 2.2}{\overset{(1)\ in}{<}} \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{n^k}\binom{n}{k} \\
&\underset{erweiterung}{\overset{Summen-}{<}} \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{n^k}\binom{n}{k} + \sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{n^k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n^k}\binom{n}{k} \underset{Formel}{\overset{Binomische}{=}} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.
\end{aligned}$$

Wir haben gezeigt, dass $a_m < a_n$ ist falls $m < n$. Damit ist die Folge streng monoton *wachsend. Kommen wir nun zur Beschränktheit:*

$$
\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} && \text{Binomische Formel} \\
&= \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\
&\underset{HS\ 2.2}{\overset{(2,3)\ aus}{\leq}} 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\
&= 2 + \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} && \text{Indexverschiebung} \\
&= 2 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \\
&\underset{Reihe}{\overset{Geometrische}{=}} 2 + \frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}} = 2 + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\
&\to 3 && \text{für} \quad n \to \infty
\end{aligned}
$$

□

Wir halten unser Ergebnis fest:

Regel 27: Die Eulersche Zahl: Wir geben dem Grenzwert

$$\mathrm{e} := \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n .$$

einen Namen, nämlich *Eulersche Zahl*. Die eigentliche Definition der Eulerschen Zahl ist durch

$$\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

gegeben.

Wir werden im folgenden Unterkapitel untersuchen, dass für die Eulersche[4] Zahl tatsächlich

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

[4] Leonhard Euler (1707-1783) war ein schweizer Mathematiker. Er studierte in Basel bei Johann Bernoulli, einem Bruder von Jakob Bernoulli

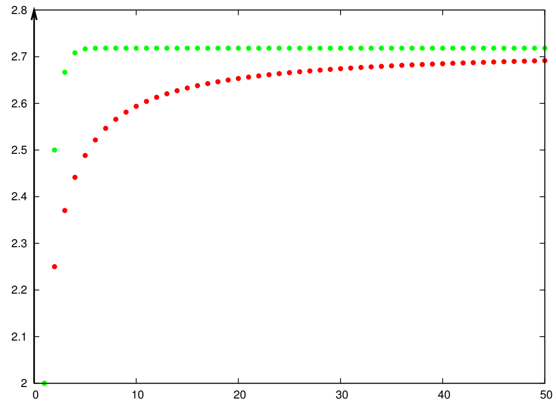


Abbildung 3: Näherungen an die Eulersche Zahl durch $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ und $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$

gilt. An dieser Stelle genüge uns die Betrachtung einiger Zahlwerte der beiden Darstellungen als Gegenüberstellung (siehe auch Abbildung 3):

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$	n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$
1	2.000000	2.000000	20	2.653298	2.718282
2	2.250000	2.500000	30	2.674319	2.718282
3	2.370370	2.666667	40	2.685064	2.718282
4	2.441406	2.708333	50	2.691588	2.718282
5	2.488320	2.716667	60	2.695970	2.718282
6	2.521626	2.718056	70	2.699116	2.718282
7	2.546500	2.718254	80	2.701485	2.718282
8	2.565785	2.718279	90	2.703332	2.718282
9	2.581175	2.718282	100	2.704814	2.718282
10	2.593742	2.718282			

2.3 Reihen

Reihen sind eine spezielle Form von Folgen a_n, deren Glieder als *Partialsummen*

$$s_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k = \sum_{n=0}^{k} a_n$$

geschrieben werden können. Unter einer *(unendlichen) Reihe* verstehen wir eine unendliche Summe, das heißt eine Summe deren obere Grenze nicht existiert[5].

[5] Wenn etwas gegen ∞ strebt so sagen wir es existiere nicht.

Regel 28: **(unendliche) Reihe:** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Die Folge

$$s_k := \sum_{n=0}^{k} a_n$$

der *Partialsummen* heißt *(unendliche) Reihe* und wird mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

bezeichnet.
Konvergiert die Folge $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$, so wird ihr Grenzwert ebenfalls mit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ bezeichnet.
Die spezielle Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

heißt *alternierende Reihe*.

Die Folgenglieder stellen sich dann dar als

$$\begin{aligned} s_0 &= a_0 \\ s_1 &= a_0 + a_1 \\ s_2 &= a_0 + a_1 + a_2 \\ &\vdots \\ s_n &= a_0 + a_1 + \cdots + a_n \end{aligned}$$

Demzufolge ist eine Reihe konvergent, sowie die Folge ihrer Partialsummen konvergiert. Das dürfte klar sein. Um Reihen auf Konvergenz zu untersuchen gibt es eine ganze Reihe (hier aber nur endlich viele) Konvergenzkriterien. Wie auch bei den Folgen werden wir uns hier nur auf ein paar wesentliche beschränken.

Betrachten wir zunächst ein paar Beispiele:

Beispiel 13 Geometrische Reihe Sie erinnern sich sicher (Kapitel 1.5, Aufgabe ??) an die Geometrische Reihe[6]

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

[6]Die Geometrische Reihe ist eine der bemerkenswertesten und unentbehrlichsten Reihen in der Analysis. Ihre Konvergenzaussage spielt eine beherrschende Rolle in vielen Anwendungen. Sie wurde schon 1593 von Vieta (1540–1603) gefunden. Mit einiger Überinterpretation kann man den Spezialfall $q = \frac{1}{4}$ sogar auf Archimedes (287–212 v.Chr.) zurückführen.

für $q \neq 1$. Wie entwickelt sich diese, wenn wir n gegen ∞ streben lassen?

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k &= \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \\
&= \frac{1-\lim_{n\to\infty} q^{n+1}}{1-q} \\
&= \frac{1}{1-q} && \text{falls } |q| < 1
\end{aligned}$$

Beispiel 14

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$$

Regel 29: Konvergenzkriterien für Reihen:
Ein notwendiges (aber nicht hinreichendes) Kriterium zur Konvergenz einer Reihe $\left(\sum_{n=0}^{k} a_n\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ist, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Sind alle Folgenglieder $a_n \geq 0$ so konvergiert die Reihe $\left(\sum_{n=0}^{k} a_n\right)_{k\in\mathbb{N}}$ wenn sie beschränkt ist. (Das Analoge gilt für nicht positive Folgenglieder.)

Quotientenkriterium: Sei $a_k \neq 0$ für alle $k \geq k_0$. Es gebe eine reelle Zahl $\theta \in (0,1)$, so dass

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq \theta\,, \quad \forall k \geq k_0\,.$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. (Ist der Grenzwert des Quotienten größer als eins so divergiert die Reihe. In allen anderen Fällen gibt es keine Aussage.)

Leibnizkriterium (für alternierende Reihen): Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge nicht negativer Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$.

Beispiel 15 Beschränktheit

(1) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$ ist divergent ("Harmonische Reihe")

(2) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$ ist konvergent

Beispiel 16 Quotientenkriterium

(1)	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$	ist konvergent
(2)	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k}$	QK nicht anwendbar
(3)	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$	QK nicht anwendbar

Beispiel 17 alternierende Reihen

(1)	$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$	ist divergent
(2)	$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = \ln 2$	ist konvergent
(3)	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$	ist konvergent

Die Konvergenz festzustellen ist das Eine. Man kennt dann aber den Grenzwert noch lange nicht. Den muss man dann durch geschicktes Umformen herausfinden. Dazu gibt es keine Formel, nur Übung.

Beispiel 18 Grenzwert berechnen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$$

Satz 2.3 (Eulersche Zahl). *Es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Beweis Satz 2.3:

Aus

$$\begin{aligned} a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\ = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n} \\ \geq \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \left(\frac{n-N}{n}\right)^N \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} =: s_N \end{aligned}$$

und

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!} \frac{n}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n} \leq \frac{1}{k!}$$

folgt

$$\mathrm{e} \leq \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \leq \mathrm{e}$$

und damit die Behauptung.

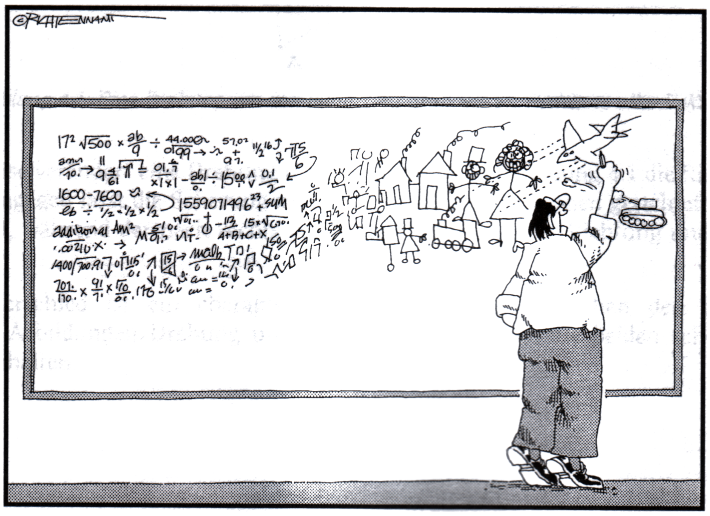
□

Funktionen I: Polynome

3

Wir behandeln:

- Was sind Funktionen generell?
- Wie lösen wir Gleichungen und Ungleichungen auf?
  Speziell behandeln wir die Betragsfunktion
- Was bedeutet Ableitung und ...
- was Integration? Speziell am Beispiel der Polynome.



In diesem Kapitel wenden wir uns zunächst dem Funktionsbegriff als solchen zu und den spziellen Funktionen "Betragsfunktion" und "Polynom".

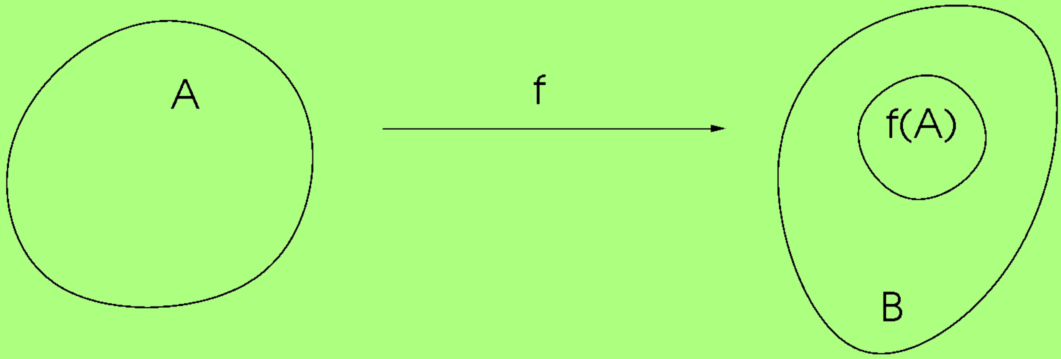
Die Polynome stellen die einfachste Sorte von Funktionen dar. An ihnen werden wir die Begriffe Differentiation, beziehungsweise Ableitung und Integration kennenlernen.

Der Umgang mit Beträgen und Ungleichungen gehört zu den Grundlagen mathematischen Rechnens und wird ständig benötigt, so dass wir uns dieses Werkzeug gleich zu Beginn aneignen wollen, auch wenn die Betragsfunktion streng genommen eine Kombination aus Polynom und Wurzelfunktion ist und wir uns "Kombinationen" (was auch immer das genau heißt) von Funktionen erst in Kapitel 4.1 anschauen werden.

3.1 Eigenschaften von Funktionen I: Definition und Grundlegendes

Regel 30: Funktionen: Seien A, B Mengen. Eine $Funktion$ oder $Abbildung$ von A nach B ist eine Teilmenge f der Produktmenge $A \times B$ derart, dass zu jedem $x \in A$ genau ein $y \in B$ existiert mit $(x, y) \in f$.
Statt $(x, y) \in f$ schreibt man auch $y = f(x)$ oder

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\mapsto y\,. \end{aligned}$$



Schreibweise	Definition/Sprechweise
$y = f(x)$	heißt *Funktionswert von* f *an der Stelle* x.
A	heißt *Definitionsbereich von* f (auch $\mathbb{D}_f$).
B	heißt *Wertebereich* von f.
Für $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$	heißt
$f(A')$	$:= \{y \in B \mid \exists x \in A' \text{ mit } y = f(x)\}$
	Bild (–menge) von A' *(unter* f*).*
$f^{-1}(B')$	$:= \{x \in A \mid f(x) \in B'\}$
	Urbild (–menge) von B' *(unter* f*).*

Beispiel 19

Wir erinnern uns an die Funktion aus der Übung:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

(Siehe Abb. 4) Der Definitionsbereich ist ganz $\mathbb{R}$ und die Bildmenge von $\mathbb{R}$ unter f sind alle nicht negativen Zahlen in $\mathbb{R}$, also:

$$\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \quad \text{und} \quad f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_0^+$$

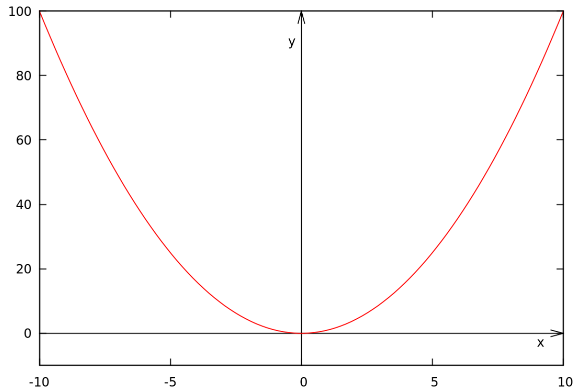


Abbildung 4: $f(x) = x^2$

Interpretieren wir die Funktion f mal als Teilmenge der Produktmenge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (und nennen die Teilmenge G_f, um Verwirrungen zu vermeiden). Dann verhält es sich so:

$$G_f := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist die ganze zweidimensionale Ebene, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$ besteht aus allen Punkten der sogenannten oberen Halbebene inklusive der x–Achse, das heißt inklusive aller Punkte $(x, 0)$ und f ist eine Teilmenge der oberen Halbebene, bestehend aus Tupeln, die sich durch alle reellen x–Werte und den entsprechenden Funktionswerten $f(x)$ zusammensetzen.

Die Punktmenge G_f nennen wir *Graph* der Funktion f. Es ist die Produktmenge aus dem Definitions– und Bildbereich (alle Punkte die "erreicht" werden) von f

Regel 31: Gleichheit von Funktionen: Zwei Funktionen $f : A \to B$ und $g : C \to D$ sind gleich, genau dann wenn sowohl die Abbildungsvorschriften von f und g gleich sind und jeweils Definitions– und Bildbereiche übereinstimmen. Das heißt:

$$(f = g) :\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} A &=& C\,, & \\ B &=& D & \text{und} \\ f(x) &=& g(x) & \forall x \in A\,. \end{array} \right.$$

Man sagt auch die Funktionen sind $identisch\ gleich$: $f \equiv g$

Wir haben gesehen, dass die Wahl des Definitionsbereiches einer Funktion wesentlich zu deren Bestimmung ist. Da das ständige Angeben des Definitions– und Wertebereichs lästig ist wollen wir eine Vereinbarung treffen:

Regel 32: Definitionsbereich/Wertebereich:
Ist der Definitionsbereich einer Funktion nicht angegeben, ist verabredungsgemäß der größtmögliche Definitionsbereich in $\mathbb{R}$ gemeint.
Ist der Wertebereich einer Funktion nicht angegeben, ist verabredungsgemäß die Bildmenge $f(\mathbb{D}_f)$ des Definitionsbereichs gemeint.

Größtmöglich ist noch ein wenig flapsig formuliert: Wir meinen damit alle Werte an denen f existiert, das heißt wenn $f(x)$ einen endlichen Wert annimmt; dort also nicht nach ∞ strebt.

Beispiel 20

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

existiert bei allen Werten außer $x = 0$ (siehe Abb. 5). Der Definitionsbereich von f, sofern nicht anders angegeben ist dementsprechend gegeben durch

$$\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

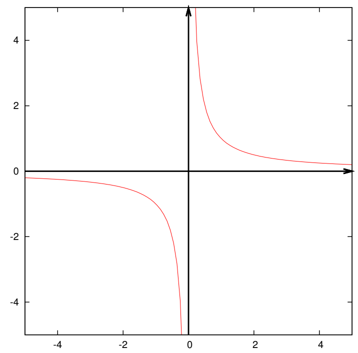


Abbildung 5: $f(x) = \frac{1}{x}$

3.2 Die Betragsfunktion

Als erstes Beispiel einer Funktion wollen wir die Betragsfunktion betrachten.

Regel 33: Betragsfunktion:

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls} \quad x \in \mathbb{R}_0^+ \\ -x & \text{falls} \quad x \in \mathbb{R}^- \end{cases}$$

Eine andere Möglichkeit, die Betragsfunktion zu beschreiben ist

$$|x| = \sqrt{x^2}\,.$$

Da die Betragsfunktion eine Verkettung von je einem Polynom und einer Wurzelfunktion ist, ist sie eigentlich in ein späteres Kapitel anzusiedeln. Auf dem Weg dorthin werden wir aber nicht umhin kommen, hier und da mit ihr zu rechnen, weshalb wir bereits jetzt lernen wollen, wie mit ihr umzugehen ist.

Werfen wir gerade noch mal einen Blick darauf, warum es sich um verschiedene Funktionen handelt, wenn zwar die Abbildungsvorschrift die gleiche ist, der Definitionsbereich sich aber unterscheidet. Die Punktemenge $\{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}^-\}$ ist eine völlig andere als $\{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}_0^+\}$. Siehe Abbildung 6.

Machen wir doch gleich mal ein wenig Rechengymnastik mit der Betragsfunktion:

Beispiel 21 Betragsfunktion I Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$|x + 2| = 4$$

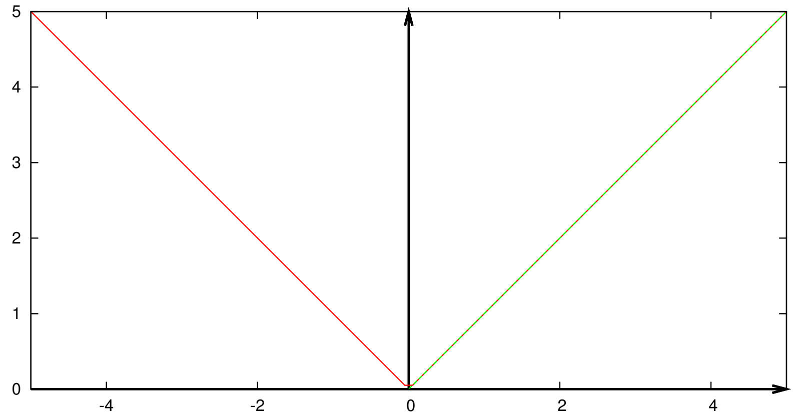


Abbildung 6: Die Betragsfunktion $f(x) = |x|$

Wir machen eine Fallunterscheidung.

$$\begin{array}{llcl}
\text{1. Fall:} & x+2 \geq 0 & \Rightarrow & \mathbb{L}_{1a} = [-2, \infty) \\
\text{Dann gilt} & |x+2| = 4 & & \\
\Leftrightarrow & x+2 = 4 & & \\
\Leftrightarrow & x = 2 & \Rightarrow & \mathbb{L}_{1b} = \{2\}
\end{array}$$

Im ersten Fal list also die Gleichung erfüllt, wenn $x \in \mathbb{L}_{1a}$ und in $\mathbb{L}_{1b}$ enthalten ist, wenn also $x \in \mathbb{L}_{1a} \vee x \in \mathbb{L}_{1b}$ gilt. damit ergibt sich für die Lösungsmenge des ersten Falls

$$\mathbb{L}_1 = \mathbb{L}_{1a} \cap \mathbb{L}_{1b} = [-2, \infty) \cap \{2\} = \{2\}.$$

$$\begin{array}{llcl}
\text{2. Fall:} & x+2 < 0 & \Rightarrow & \mathbb{L}_{2a} = (-\infty, -2) \\
\text{Dann gilt} & |x+2| = 4 & & \\
\Leftrightarrow & -(x+2) = 4 & | \cdot (-1) & \\
\Leftrightarrow & x+2 = -4 & & \\
\Leftrightarrow & x = -6 & \Rightarrow & \mathbb{L}_{2b} = \{-6\}
\end{array}$$

Die Lösungsmenge für den zweiten Fall ergibt sich dann zu

$$\mathbb{L}_2 = \mathbb{L}_{2a} \cap \mathbb{L}_{2b} = (-\infty, -2) \cap \{-6\} = \{-6\}.$$

Die Gesamtlösungsmenge, in der beide Fälle enthalten sind besteht aus all den Werten x, für die gilt, dass sie entweder in $\mathbb{L}_1$ oder in $\mathbb{L}_2$ enthalten sind, also für die gilt, dass $x \in \mathbb{L}_1 \vee x \in \mathbb{L}_2$.

$$\boxed{\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \{2\} \cup \{-6\} = \{-6, 2\}}$$

Beispiel 22 Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$|x+2| \geq 4\,?$$

$$\begin{array}{llcll} \text{1. Fall:} & x+2 \geq 0 & \Rightarrow & \mathbb{L}_{1a} = [-2, \infty) \\ \text{Dann gilt} & |x+2| \geq 4 & & \\ \Leftrightarrow & x+2 \geq 4 & & \\ \Leftrightarrow & x \geq 2 & \Rightarrow & \mathbb{L}_{1b} = [2, \infty) \end{array}$$

Im ersten Fall erfüllen alle die x die Ungleichung, die sowohl in $\mathbb{L}_{1a}$ als auch in $\mathbb{L}_{1b}$ enthalten sind, das heißt also $x \in \mathbb{L}_{1a} \wedge x \in \mathbb{L}_{1b}$. Damit ist die erste Lösungsmenge gegeben durch

$$\mathbb{L}_1 = \mathbb{L}_{1a} \cap \mathbb{L}_{1b} = [-2, \infty) \cap [2, \infty) = [2, \infty)\,.$$

$$\begin{array}{llcll} \text{2. Fall:} & x+2 < 0 & \Rightarrow & \mathbb{L}_{2a} = (-\infty, -2) \\ \text{Dann gilt} & |x+2| \geq 4 & & \\ \Leftrightarrow & -(x+2) \geq 4 & | \cdot (-1) & \\ \Leftrightarrow & x+2 \leq -4 & & \\ \Leftrightarrow & x \leq -6 & \Rightarrow & \mathbb{L}_{2b} = (-\infty, -6] \end{array}$$

Die Lösungsmenge für den zweiten Fall ergibt sich dann zu

$$\mathbb{L}_2 = \mathbb{L}_{2a} \cap \mathbb{L}_{2b} = (-\infty, -2) \cap (-\infty, -6] = (-\infty, -6]\,.$$

Die Gesamtlösungsmenge, in der beide Fälle enthalten sind besteht aus all den Werten x, für die gilt, dass sie entweder in $\mathbb{L}_1$ oder in $\mathbb{L}_2$ enthalten sind, also für die gilt, dass $x \in \mathbb{L}_1 \vee x \in \mathbb{L}_2$.

$$\boxed{\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = [2, \infty) \cup (-\infty, -6] = \mathbb{R} \setminus (-6, 2)}$$

Die Anzahl der zu betrachtenden Fälle ergibt sich aus der Anzahl der Betragsstriche.

Beispiel 23 Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$|x+2| - |1-2x| < 1\,?$$

1. Fall:

$$(x+2 \geq 0) \wedge (1-2x \geq 0) \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L}_{1a} = [-2,\infty) \cap (-\infty,\frac{1}{2}] = [-2,\frac{1}{2}]$$

$$\begin{aligned} & x+2-1+2x < 1 & & \\ \Leftrightarrow\quad & 3x < 0 & & \\ \Leftrightarrow\quad & x < 0 & \Rightarrow\quad & \mathbb{L}_{1b} = (-\infty,0) \\ & & \Rightarrow\quad & \mathbb{L}_1 = \mathbb{L}_{1a} \cap \mathbb{L}_{1b} \\ & & & = [-2,\frac{1}{2}] \cap (-\infty,0) \\ & & & = [-2,0) \end{aligned}$$

2. Fall:

$$(x+2 \geq 0) \wedge (1-2x < 0) \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L}_{2a} = [-2,\infty) \cap (\frac{1}{2},\infty) = (\frac{1}{2},\infty)$$

$$\begin{aligned} & x+2+1-2x < 1 & & \\ \Leftrightarrow\quad & -x+2 < 0 & & \\ \Leftrightarrow\quad & x > 2 & \Rightarrow\quad & \mathbb{L}_{2b} = (2,\infty) \\ & & \Rightarrow\quad & \mathbb{L}_2 = \mathbb{L}_{2a} \cap \mathbb{L}_{2b} \\ & & & = (\frac{1}{2},\infty) \cap (2,\infty) \\ & & & = (2,\infty) \end{aligned}$$

3. Fall: $(x+2<0) \wedge (1-2x \geq 0) \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L}_{3a} = (-\infty,-2) \cap (-\infty, \frac{1}{2}]$

$$= (-\infty,-2)$$

$$\begin{aligned}
& -(x+2)-(1-2x) < 1 \\
\Leftrightarrow \quad & -x-2-1+2x < 1 \\
\Leftrightarrow \quad & x-4 < 0 \\
\Leftrightarrow \quad & x < 4 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L}_{3b} = (-\infty,4) \\
& \Rightarrow \quad \mathbb{L}_3 = \mathbb{L}_{3a} \cap \mathbb{L}_{3b} \\
& = (-\infty,-2) \cap (-\infty,4) \\
& = (-\infty,-2)
\end{aligned}$$

4. Fall: $(x+2<0) \wedge (1-2x<0) \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L}_{4a} = (-\infty,-2) \cap (\frac{1}{2},\infty)$

$$= \emptyset$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{L}_4 = \emptyset$$

Die Gesamtlösungsmenge ist dann gegeben durch

$$\boxed{\mathbb{L} = \bigcup_{i=1}^{4} \mathbb{L}_i = [-2,0) \cup (2,\infty) \cup (-\infty,-2) \cup \emptyset = \mathbb{R} \setminus [0,2]}$$

Beispiel 24 Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$x^2 \geq 3\,?$$

$$\begin{aligned}
& x^2 \geq 3 \\
\Leftrightarrow \quad & \sqrt{x^2} \geq \sqrt{3} \\
\Leftrightarrow \quad & |x| \geq \sqrt{3}
\end{aligned}$$

1. Fall $x \geq 0$: Das führt auf $x \geq \sqrt{3}$, also

$$\mathbb{L}_1 = [\sqrt{3},\infty)\,.$$

2. Fall $x < 0$: Das führt auf $-x \geq \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -\sqrt{3}$, also auf

$$\mathbb{L}_2 = (-\infty,-\sqrt{3}]\,.$$

Insgesamt ist die Lösungsmenge gegeben durch

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = (-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, \infty) = \mathbb{R} \setminus (-\sqrt{3}, \sqrt{3})\,.$$

Bevor wir das Kapitel verlassen wollen wir Rechenregeln für die Betragsfunktion noch einmal zusammenfassen:

Regel 34: Rechnen mit Ungleichungen: Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $c \geq 0$ und $d < 0$. Dann gilt

Addition und Subtraktion:

$$\begin{aligned} & a && \leq b \\ \Leftrightarrow \quad & a + c && \leq b + c \\ \Leftrightarrow \quad & a - c && \leq b - c \end{aligned}$$

Multiplikation und Division:

$$\begin{aligned} & a && \leq b \\ \Leftrightarrow \quad & a \cdot c && \leq b \cdot c \\ \Leftrightarrow \quad & \tfrac{a}{c} && \leq \tfrac{b}{c} \end{aligned}$$

ABER:

$$\begin{aligned} & a && \leq b \\ \Leftrightarrow \quad & a \cdot d && \geq b \cdot d \\ \Leftrightarrow \quad & \tfrac{a}{d} && \geq \tfrac{b}{d} \end{aligned}$$

Und für $a, b \neq 0$:

$$\begin{aligned} & a && \leq b \\ \Leftrightarrow \quad & \tfrac{1}{a} && \geq \tfrac{1}{b} \end{aligned}$$

Die Situation ist analog für $a \geq b$.

3.3 Polynome

Regel 35: Polynom: Für $i \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq i \leq n$ seien $a_i \in \mathbb{R}$ mit $a_n \neq 0$. Dann heißt

$$p(x) := \sum_{j=0}^{n} a_j x^j = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

(reelles) Polynom n–ten Grades.

Schreibweise	Sprechweise
$a_0, \ldots, a_n$	heißen Koeffizienten,
a_0	heißt absolutes Glied und
a_n	heißt Hauptkoeffizient des Polynoms

3.3.1 Nullstellen und Linearfaktoren

Regel 36: Nullstellen von Polynomen: Es sei p ein Polynom vom Grad n. x_0 heißt *Nullstelle von* p, falls

$$p(x_0) = 0$$

gilt. Es gibt dann ein Polynom g vom Grad $n-1$, so dass

$$p(x) = (x - x_0)g(x)\,.$$

Wir nennen den Ausdruck $(x - x_0)$ *Linearfaktor* von p.

Wir können diesen Prozess sukzessive fortführen, so lange das neu entstandene Polynom (hier g) eine weitere Nullstelle besitzt. Wir nennen ein Polynom *reduzibel*, wenn es sich vollständig in Linearfaktoren zerlegen läßt, ansonsten heißt es *irreduzibel*. Wir sagen ein Polynom ist *in* $\mathbb{R}$ *reduzibel*, wenn es sich vollständig in Linearfaktoren aus $\mathbb{R}$ zerlegen läßt, andernfalls nennen wir es *in* $\mathbb{R}$ *irreduzibel*. (Das gilt analog für $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{C}$ anstatt $\mathbb{R}$.)

Da sich durch Abspalten des Linearfaktors der Grad des Polynoms um eins erniedrigt kann ein Polynom vom Grad n maximal n Nullstellen haben.

Satz 3.1 (Fundamentalsatz der Algebra[7]). *Jedes Polynom $p(x)$ mit komplexen Koeffizienten a_i, $i = 0, \ldots, n$ läßt sich als ein Produkt von n Linearfaktoren schreiben:*

$$p(x) = a_n \prod_{j=1}^{n} (x - b_j)$$

Die komplexen Zahlen b_j, $j = 1, \ldots, n$ sind Nullstellen von p, die nicht paarweise verschieden sein müssen. Gibt es l Nullstellen mit $b_{j_1} = \ldots = b_{j_l}$ so sagen wir die Nullstelle b_j habe die Vielfachheit *l.*

Ein Polynom von ungeradem Grad hat mindestens eine reelle Nullstelle.

Also fassen wir unseren aktuellen Wissensstand kurz in anderen Worten zusammen: Ein Polynom läßt sich in so viele Linearfaktoren zerlegen, wie Nullstellen vorhanden sind. In $\mathbb{C}$ finden wir auf jeden Fall so viele Nullstellen, dass wirklich nur noch lineare Faktoren übrig sind. Beschränken wir uns auf die reellen Zahlen, so kann es passieren, dass quadratische Ausdrücke übrig bleiben.

Beispiel 25

$$p(x) = x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)(x^2+1) = (x-1)(x+i)(x-i)$$

hat die Nullstellen $1, i, -i$, also eine Nullstelle in $\mathbb{R}$ und zwei in $\mathbb{C}$.

[7]Den Beweis zu diesem Satz finden Sie in allen einschlägigen Analysis–Büchern. Mein Tipp: Heuser (1991[9])

Wie aber finden wir nun Nullstellen bei einem Polynom? Gehen wir mal von dem einfachsten Fall aus (wir überspringen die Polynome vom Grad 1!) und denken an ein Polynom vom Grad 2:

Regel 37: Lösen der quadratischen Gleichung:

Die Lösungen x_1 und x_2 von

$$ax^2 + bx + c = 0$$

sind gegeben durch

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

sofern der Ausdruck unter der Summe nicht negativ ist. Es gilt folgendes:

1. Ist $b^2 - 4ac < 0$, so gibt es in $\mathbb{R}$ keine Lösung
2. Ist $b^2 - 4ac = 0$, so gibt es genau eine Lösung, nämlich $x_1 = \frac{-b}{2a}$
3. Ist $b^2 - 4ac > 0$, so gibt es genau zwei Lösungen, nämlich $x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ und $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Sonderfälle sind solche bei denen der Grad reduziert werden kann. Hat ein Polynom etwa die Darstellung

$$p(x) = a_4x^4 + a_2x^2 + a_0$$

so setzen wir zunächst $y = x^2$ ein und suchen die Nullstelle des quadratischen Polynoms

$$p(y) = a_4y^2 + a_2y + a_0$$

und erhalten dann für die Nullstellen y_1, y_2 von $p(y)$ die Nullstellen

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{y_1}\,,\ x_{3,4} = \pm\sqrt{y_2}$$

von $p(x)$.

In allen anderen Fällen müssen Nullstellen geraten werden. Sie haben richtig gelesen: GERATEN! Aber die Mathematik wäre nicht was sie ist, wenn es nicht wenigstens eine kleine Hilfestellung dazu gäbe. Zunächst definieren wir ein neues Zeichen:

Regel 38: Teiler: Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a \neq 0$, dann definieren wir

$$a|b :\Leftrightarrow \frac{b}{a} \in \mathbb{Z}$$

Wir sagen a ist ein *Teiler* von b.

Regel 39: Nullstellen von Polynomen mit ganzen Koeffizienten:
Es sei $p(x)$ ein Polynom vom Grad n mit ganzen Koeffizienten, das heißt $a_i \in \mathbb{Z}$ für $i = 0, \dots, n$. Dann gilt für eine Nullstelle x_0 von p

1. $$x_0 \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad x_0 | a_0$$

2. $$x_0 \in \mathbb{Q} \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{r}{s} \ : \ r|a_0 \wedge s|a_n$$

Das liefert uns nun nicht eine alleserschlagende Formel für eine Nullstelle, aber es kann die Suche sehr erleichtern. Wir überzeugen uns wieder anhand eines Beispiels:

Beispiel 26

Wir suchen eine Nullstelle des Polynoms

$$p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

Wenn es dazu eine Nullstelle $x_0 \in \mathbb{Z}$ gibt, so ist diese ein Teiler von a_0. Es kommen also die Zahlen

$$\{\pm 1, \pm 2\}$$

in Frage. Probieren führt dazu, dass $x_1 = 1$ eine Nullstelle ist. Wir können nun den Linearfaktor $(x - 1)$ abspalten, um

$$p(x) = (x - 1) \cdot g(x)$$

zu erhalten. $g(x)$ berechnen wir mittels Polynomdivision:

$$\begin{array}{rrrrrrrrl}
 & x^3 & - & 2x^2 & - & x & + & 2 & = (x-1)(x^2 - x - 2) \\
- & x^3 & + & x^2 & & & & & \\
\hline
 & & - & x^2 & - & x & & & \\
 & & + & x^2 & - & x & & & \\
\hline
 & & & & - & 2x & + & 2 & \\
 & & & & + & 2x & - & 2 & \\
\hline
 & & & & & & & 0 &
\end{array}$$

Es ist nun

$$g(x) = (x^2 - x - 2)\,,$$

dessen Nullstellen wir über die "Mitternachtsformel" (siehe Regel 37, S. 53) berechnen können:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

Insgesamt können wir nun mit den drei berechneten Nullstellen $-1, 1, 2$ unser Polynom in drei Linearfaktoren zerlegen:

$$p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x-1)(x+1)(x-2)$$

Beispiel 27

$$p(x) = x^3 + x - x^2 - 1 = (x-1)\underbrace{(x^2+1)}_{=g(x)}$$

Das dürfen Sie gerne mal selbst rechnen. g hat in diesem Fall keine weiteren reellen Nullstellen. In $\mathbb{C}$ zerfällt es zu

$$(x^2+1) = (x-i)(x+i)$$

Beispiel 28

$$p(x) = 6x^4 + 7x^3 - 13x^2 - 4x + 4$$

hat, wenn es rationale Nullstellen gibt welche von der Form

$$\{\pm\frac{2}{3}\,,\ \pm\frac{4}{3}\,,\ \pm 2\,,\ \pm 4\,,\ \pm 1\,,\ \pm\frac{1}{6}\,,\ \pm\frac{1}{3}\,,\ \pm\frac{1}{2}\}$$

Nun ist das ja trotz Hilfestellung doch noch mal eine ganz schöne Rechnerei. Da wird es doch Zeit eine weitere Hilfestellung hinzuzunehmen; das sogenannte *Horner–Schema*. Es beinhaltet die Idee, dass Polynom so umzuformen, dass man mit weniger Rechenaufwand Werte berechnen kann und funktioniert so:

$$\begin{aligned}
p(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 && (9)\\
&= x\left(a_n x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_2x + a_1\right) + a_0\\
&= x\left(x\left(a_n x^{n-2} + a_{n-1}x^{n-3} + \cdots + a_3x + a_2\right) + a_1\right) + a_0\\
&= \underbrace{x\,(x\,(\cdots x}_{(n-1)\text{–mal}}\ (a_n x + a_{n-1}) + a_{n-2}) + \cdots + a_1) + a_0 && (10)
\end{aligned}$$

Das ist eine rechenfreundlichere Darstellung, wenn man die benötigten Additionen und Multiplikationen zählt.

Bei der Form in (9) benötigen wir

$$\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2} = \mathcal{O}(n^2) \qquad \text{Multiplikationen,}$$

während in (10) nur

$$n = \mathcal{O}(n) \qquad \text{Multiplikationen}$$

von Nöten sind. Additionen hat man in beiden Fällen n Stück. Wenn man also viele Auswertungen vornehmen muss, lohnt es sich, das Polynom im Horner–Schema darzustellen.

Regel 40: Horner–Schema:

	−1	5	−3	−9
x= 2		−2	6	6
	−1	3	3	−3 =p(x)

$$\begin{aligned} p(x) &= -x^3 + 5x^2 - 3x - 9 \\ &= x(x(x(-1) + 5) - 3) - 9 \\ p(2) &= 2(2(2(-1) + 5) - 3) - 9 \end{aligned}$$

Beispiel 28 dürfen Sie gerne selbst zu Ende rechnen.

Sie können sich bei der Zerlegung in Linearfaktoren auch die Polynomdivision sparen, wenn Sie bei der Nullstellensuche das Horner–Schema verwenden. Die Koeffizienten des Polynoms $q(x)$ aus $p(x) = (x - x_0)q(x)$ mit $p(x_0) = 0$ lassen sich aus dem Horner–Schema direkt ablesen.

Betrachten wir dazu ein Beispiel:

Beispiel 29

	1	-2	-1	2
2	/	2	0	-2
	1	0	-1	0
1	/	1	1	
	1	1	0	

$$\begin{aligned} p(x) &= 1x^3 - 2x^2 - 1x + 2 \\ &= (x-2)(1x^2 + 0x - 1) \\ &= (x-2)(x-1)(1x+1) \end{aligned}$$

Die Werte in der untersten Zeile des Schemas entsprechen gerade den Koeffizienten von $q(x)$. Sie können sich also, nachdem Sie eine Nullstelle gefunden haben (!!) durch dieses Schema die nachfolgende Polynomdivision schenken.

Das gilt für alle Polynome.

Beweis: Es sei $p \in \mathbb{P}_n$ und $q \in \mathbb{P}_{n-1}$ mit

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j\,, \quad q(x) = \sum_{j=0}^{n-1} b_j x^j \qquad \text{und} \qquad p(x) = (x - x_0)q(x)\,.$$

Dann können wir die Koeffizienten von q mittels Koeffizientenvergleich ermitteln. Es gilt

$$\begin{aligned}
& p(x) = (x-x_0)q(x) \\
\Leftrightarrow\quad & \sum_{j=0}^{n} a_j x^j = (x-x_0)\sum_{j=0}^{n-1} b_j x^j \\
& = \sum_{j=0}^{n-1} b_j x^{j+1} - \sum_{j=0}^{n-1} x_0 b_j x^j \\
& = \sum_{j=1}^{n} b_{j-1} x^j - \sum_{j=0}^{n-1} x_0 b_j x^j \\
& = b_{n-1}x^n + \sum_{j=1}^{n-1} b_{j-1} x^j - \sum_{j=1}^{n-1} x_0 b_j x^j - x_0 b_0 \\
& = b_{n-1}x^n + \sum_{j=1}^{n-1} (b_{j-1} - x_0 b_j) x^j - x_0 b_0 \\
\Leftrightarrow\quad & a_n x^n + \sum_{j=1}^{n-1} a_j x^j + a_0 = b_{n-1}x^n + \sum_{j=1}^{n-1} (b_{j-1} - x_0 b_j) x^j - x_0 b_0 \\
\Leftrightarrow\quad & 0 = \underbrace{(b_{n-1} - a_n)}_{=0} x^n + \sum_{j=1}^{n-1} \underbrace{(b_{j-1} - x_0 b_j - a_j)}_{=0} x^j - \underbrace{(x_0 b_0 + a_0)}_{=0}
\end{aligned}$$

Daraus folgt nun die Vorschrift zur Berechnung der $n-1$ Koeffizienten von q:

$$\begin{aligned}
& b_{n-1} = a_n \\
j = n-1, \dots, 1: \quad & b_{j-1} = x_0 b_j + a_j
\end{aligned}$$

Werfen wir noch einmal einen Blick auf das Horner-Schema im allgemeinen Fall:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_{n-k}	$\cdots$	a_1	a_0
x_0	/	$b_{n-1}x_0$	$b_{n-2}x_0$	$\cdots$	$b_{n-k}x_0$	$\cdots$	b_1x_0	b_0x_0
	a_n	$b_{n-1}x_0+$ a_{n-1}	$b_{n-2}x_0+$ a_{n-2}	$\cdots$	$b_{n-k}x_0+$ a_{n-k}	$\cdots$	b_1x_0+ a_1	b_0x_0+ a_0
=:	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\cdots$	b_{n-k-1}	$\cdots$	b_0	0

□

Regel 41: Zusammenfassung zu Nullstellen von Polynomen:

- $p \in \mathbb{P}_1$: Wir lösen die lineare Gleichung nach x auf.
- $p \in \mathbb{P}_2$: Mit der Mitternachtsformel aus Regel 37 bestimmen wir mögliche Nullstellen. Ist der Wert unter der Wurzel

  < 0 : so hat das Polynom keine reellen Nullstellen,

  $= 0$: so hat das Polynom eine reelle Nullstelle mit der Vielfachheit 2 und

  > 0 : so hat das Polynom zwei reelle Nullstellen.
- $p \in \mathbb{P}_n$ mit $n > 2$:
  - Hat das Polynom eine spezielle Form, die es erlaubt auf eine einfachere zurückzuführen, so tun wir das. Etwa $p(x) = x^4 + x^2 - 1$ ersetzen wir zunächst durch $p(y) = y^2 + y - 1$ gemäss $y = x^2$. Wir berechnen zunächst die Nullstellen (sofern in $\mathbb{R}$ vorhanden) von $p(y)$ und ermitteln dann (sofern in $\mathbb{R}$ möglich) aus $y = x^2$ die entsprechenden Werte für x.
  - Hat das Polynom keine spezielle Form, so gehen wir folgendermaßen vor:
    1. Wir setzen $k = 1$ und $p_k(x) = p(x)$
    2. Wir "raten" eine Nullstelle x_k von $p_k(x)$ unter Zuhilfenahme von Regel 39 und dem Horner–Schema (Regel 40) zur Arbeitserleichterung.
    3. Mittels Polynomdivision (siehe Beispiel 26) bestimmen wir das Polynom $p_{k+1}(x) = \frac{p_k(x)}{x - x_k}$.
    4. Solange wir Nullstellen finden können setzen wir an dieser Stelle $k = k+1$ und gehen zu 2.

3.3.2 Polynomkonstruktionen

Regel 42: gerade und ungerade Funktionen: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ symmetrisch zum Ursprung ($= (0,0)$), das heißt $\forall x \in D \mid -x \in D$.

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt

gerade	falls	$f(x) = f(-x)$
ungerade	falls	$f(x) = -f(-x)$

$\forall x \in D$.

Gerade Funktionen sind achsensymmetrisch bezüglich der y–Achse und ungerade Funktionen sind punktsymmetrisch bezüglich des Ursprungs.

Beispiel 30

1. $f(x) = x^2$ ist eine gerade Funktion
2. $f(x) = x$ ist eine ungerade Funktion
3. $f(x) = 3$ ist eine gerade Funktion

Regel 43: Lagrange–Interpolation: Gegeben seien die n Punktepaare

$$(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\,.$$

Dann erfüllt das *Lagrange–Polynom* vom Grad $n-1$

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} \in \mathbb{P}_{n-1}$$

die Bedingung

$$p(x_i) = y_i\,,$$

was bedeutet, dass es genau durch die angegebenen Punkte verläuft.

Beispiel 31 Lagrange Polynom durch 8 Punkte Welches Polynom $p \in \mathbb{P}_7$ durch die acht Punktepaare (X_i, Y_i), $i = 1, \dots, 9$

$$(1,-10)\,,\ (2,4)\,,\ (3,0)\,,\ (4,-3)\,,\ (5,10)\,,\ (6,3)\,,\ (7,15)\,,\ (8,-1)$$

verläuft erhalten wir mittels Lagrange–Interpolation laut Regel 43:

$$p(x) = -\frac{11}{840}x^7 + \frac{2}{5}x^6 - \frac{149}{30}x^5 + \frac{773}{24}x^4 - \frac{13957}{120}x^3 + \frac{27527}{120}x^2 - \frac{92279}{420}x + 69$$

In Abbildung 7 ist das entsprechende Polynom grafisch dargestellt. Das Polynom wurde von `Maple` vermöge folgender einfacher Doppelschleife berechnet:

```
p(x):=0:
 for i from 1 by 1 to 8 do
    prod:=1:
    for j from 1 by 1 to 8 do
       if (i <> j) then
          prod := prod*(x-X[j])/(X[i]-X[j]):
       end if;
    end do;
    p(x):= p(x)+Y[i]*prod:
 end do:
```

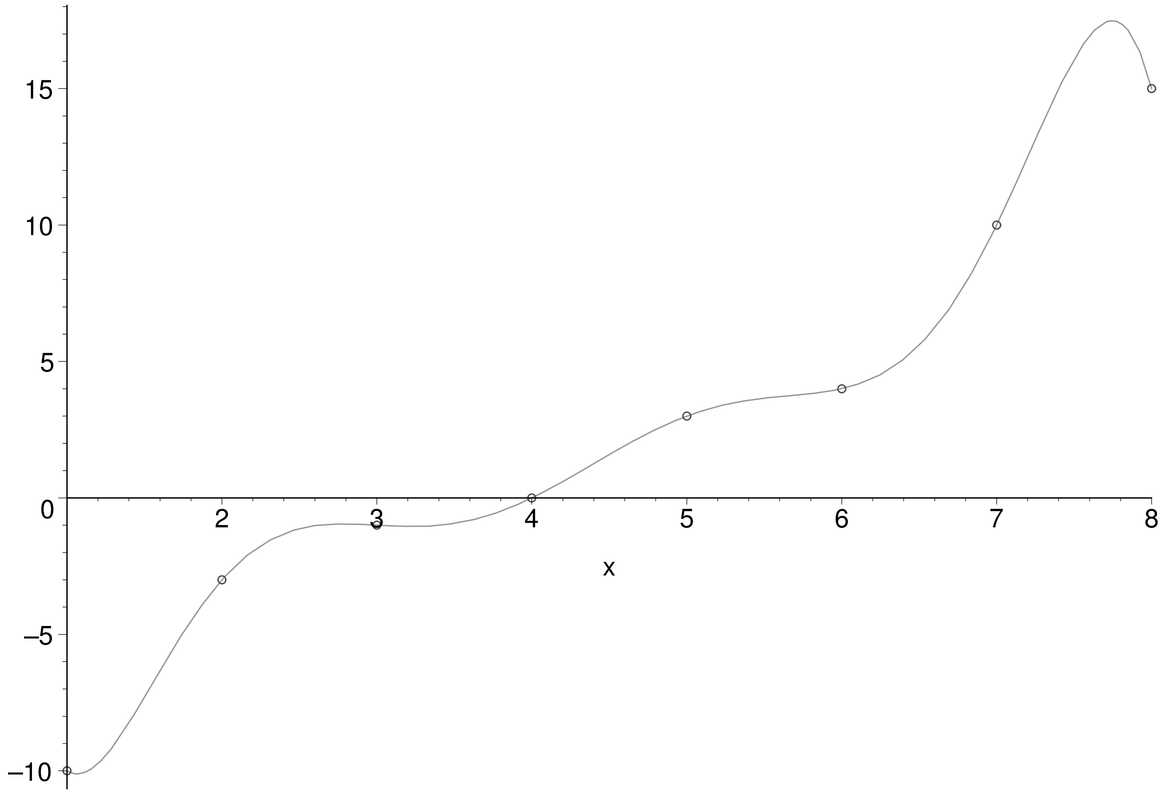


Abbildung 7: Lagrange–Polynom aus Beispiel 31

3.4 Differentiation I

Bei Betrachtungen in der Natur stellt man schnell fest, dass die meisten Vorgänge nicht statisch sind, sondern sich unter gewissen Gesetzmäßigkeiten verändern. Flüssigkeiten und Gase bewegen sich, die Distanz zum Meeresspiegel hängt vom Ort ab, an dem man misst, ein Auto fährt mit gleichmäßiger Geschwindigkeit oder aber es beschleunigt. Bei solchen und ähnlichen Vorgängen müssen wir in der mathematischen Formulierung Ausdrücke verwenden, die eine Änderungsrate des entsprechend zu beschreibenden Zustands beinhalten. Die Differentiation ist quasi das Kernstück mathematischer Modellbildung. Was es damit auf sich hat und welcher Zusammenhang zwischen momentane Änderungsrate und mittlerer Änderungsrate eines Zustands besteht, soll im folgenden Unterkapitel geklärt werden.

3.4.1 Motivation

Was genau meinen wir mit Änderungsrate eines Zustands? Das hängt natürlich davon ab was der Zustand ist und von welcher Größe dieser abhängt. Betrachten wir einmal die Grafik in Abbildung 8. Wir sehen einen Fahrradfahrer, der über einen Berg fährt. Im Koordintensystem ist die Berghöhe (y–Achse), die der Radfahrer erreicht aufgetragen auf die Entfernung (x–Achse), die er bereits gefahren ist. Der blaue Graf beschreibt also die Höhe des Radfahrers in Abhängigkeit von der Entfernung zu seinem Startpunkt. Der Zustand wäre hier die "Berghöhe" und die Abhängigkeit "gefahrene km".

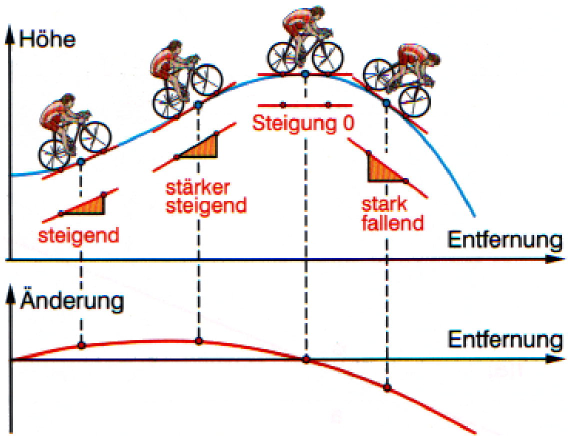


Abbildung 8: Steigungsgraf grafisch erfaßt (qualitativ)

Es könnte auch so sein, dass wir die gefahrenen Kilometer auftragen auf die Zeit, die dabei vergangen ist. Dann wäre die Änderungsrate so zu verstehen: Wieviele km sind in einem bestimmten Zeitabschnitt gefahren worden. Man denke zum Beispiel an die Bezeichnung Stundenkilometer (km/h). 100 km/h meint, dass 100 km in einer Stunde gefahren werden. Oder aber wir tragen die Zeit auf die Entfernung auf, dann würde die Änderungsrate angeben wieviel Zeit vergangen ist, nachdem eine bestimmte Strecke zurückgelegt wurde.

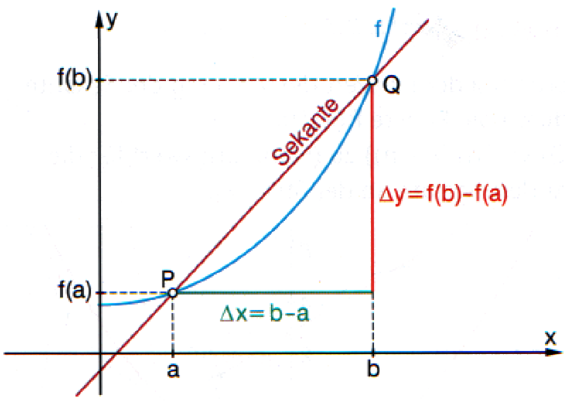


Abbildung 9: Durchschnittliche Änderungsrate/mittlere Steigung für die Funktion f im Intervall $[a, b]$

Was auch immer, die Änderungsrate beschreibt stets das Verhältnis von Länge eines Intervalls auf der y–Achse (Δy) zur Länge eines Intervalls auf der x–Achse (Δx). Für die Funktion in Abbildung 9 ist die Änderungsrate gegeben durch

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} .$$

Regel 44: Differenzenquotient: Für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Differenzenquotient. Der Differenzenquotient beschreibt die *mittlere Änderungsrate* im Intervall $[a, b]$. Die Gerade, die durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ verläuft heißt *Sekante.*

In Abbildung 9 sind die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ mit P und Q bezeichnet. Der Differenzenquotient beschreibt die Steigung der entsprechenden Sekante. Lassen wir nun den Punkt Q auf dem Grafen von f in Richtung P wandern, so stellen wir fest, dass sich die Steigung der entsprechenden Sekante verändert. Das ist gleichbedeutend damit, dass sich der Differenzenquotient und demzufolge auch die mittlere Änderungsrate verändert. Abbildung 10 verdeutlicht diesen Prozess. Den entsprechenden Differenzenquotienten beschreiben wir,

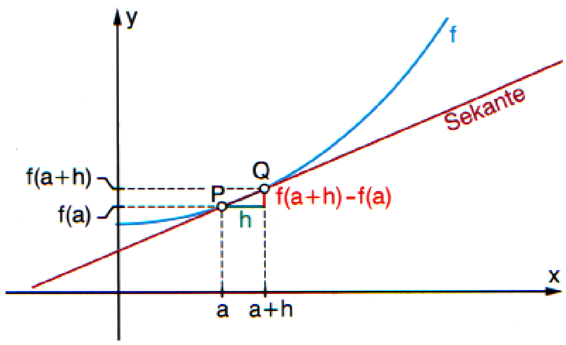


Abbildung 10: Näherungswerte für die momentane Änderungsrate der Funktion f an der Stelle a.

indem wir b durch $a + h$ ersetzen

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h},$$

wobei h gerade der Abstand $b - a$ bedeutet und "klein" sein soll.

Regel 45: Ableitung: Der Grenzwert des Differenzenquotienten

$$f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

liefert die *momentane Änderungsrate* der Funktion f an der Stelle x. Die Sekante in diesem Punkt nennen wir dann *Tangente* an f im Punkt $(x, f(x))$. Siehe dazu Abbildung 11. $f'(x)$ heißt *Ableitungsfunktion*. Sie und ordnet jedem x–Wert die Steigung der Tangente im Punkt $(x, f(x))$ zu.

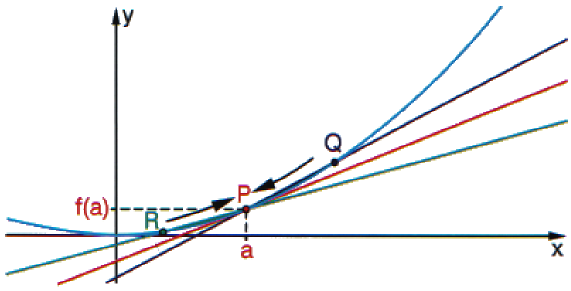


Abbildung 11: Grenzwert des Differenzenquotienten

Notation: Eine andere Schreibweise, die sogenannte *Leibnizsche Symbolik* für die Ableitung von f an der Stelle x ist

$$\frac{d}{dx}f(x) \quad \text{oder auch} \quad \frac{df}{dx}(x)\,.$$

Bevor wir nun fortfahren und uns solche Grenzwerte für ganz konkrete Funktionen betrachten, werden wir uns zunächst mit dem Grenzwertbegriff für Funktionen als solchen beschäftigen.

3.4.2 Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit

Wir betrachten eine Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ und wollen wissen welchen Wert $f(x)$ annimmt, wenn sich x dem Wert a nähert, wobei $x \neq a$.

$$'' \lim_{x \to a} f(x) = ?''$$

Und nicht nur das: Wir wollen wissen ob unsere Funktion dort überhaupt einen Wert annimmt. Was bedeutet das? Wir beginnen mit der Definition des Grenzwertes:

Regel 46: Grenzwert und Stetigkeit von Funktionen: Es sei f eine Funktion. Dann heißt c mit

$$c = \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$$

linksseitiger Grenzwert von f für x gegen a

$$d = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$$

rechtsseitiger Grenzwert von f für x gegen a.

$$c = d \quad \Rightarrow \quad c = \lim_{x \to a} f(x)\,,$$

Grenzwert von f für x gegen a, das heißt, dass der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert übereinstimmen:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$$

Für eine Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ sagen wir f *existiert* am Punkt a, wenn es einen Grenzwert gibt und

$$\lim_{x \to a} f(x) \neq \pm\infty$$

gilt.
$f : I \to \mathbb{R}$ heißt *stetig im Punkt* $x_0 \in I$, falls

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)\,.$$

- Falls x_0 ein Randpunkt von I ist, so ist der Grenzwert nur einseitig zu verstehen.
- Die Funktion f heißt *auf I stetig*, wenn sie in jedem Punkt $x_0 \in I$ stetig ist.

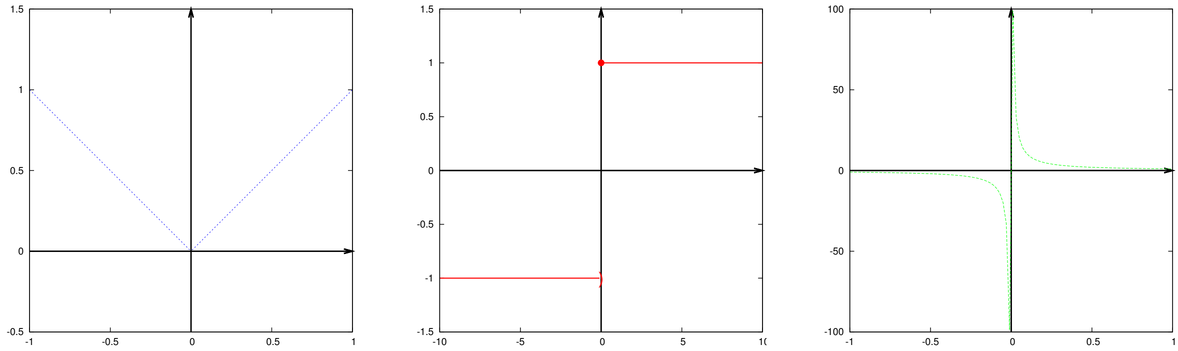
Noch einmal in Worte zusammengefasst bedeutet Stetigkeit von f an einer Stelle a: Sofern a ein innerer Punkt ist prüfen wir ob links– und rechtsseitiger Grenzwert jeweils existieren und auch übereinstimmen. Dann ist die Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = a$ stetig.

Sind zwei Funktionen stetig so sind es auch ihre Summe, Produkt und ihr Quotient, sofern der Nenner nicht verschwindet.

Notationen:

$$\lim_{x \nearrow a} f(x) := \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \searrow a} f(x) := \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$$

Im Folgenden betrachten wir ein paar Beispiele:



$f(x) = |x|$ $\qquad$ $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}$ $\qquad$ $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Abbildung 12: Beipiele von Funktionen fúr die bei $x = 0$ etwas "passiert".

Beispiel 32 Abbildung 12 zeigt die Grafen von drei verschiedenen Funktionen, die wir uns bei $x_0 = 0$ betrachten wollen.

1. Gegeben ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x) = |x| \, .$$
Es gilt
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} |x| = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x = 0$$
und
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} |x| = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} -x = 0 \, .$$
Links– und rechtsseitiger Grenzwert stimmen überein und sind nicht $\pm\infty$. Also lautet der Grenzwert
$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \, .$$
f ist stetig. Wir sagen f *existiert bei* $x = 0$.

2. Gegeben ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ -1 & \text{sonst} \end{cases} \, .$$
Es gilt
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} 1 = 1$$

und

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} -1 = -1\,.$$

Links– und rechtsseitiger Grenzwert stimmen nicht überein. Demzufolge ist f nicht stetig. Wir sagen f *existiert bei* $x = 0$.

3. Gegeben ist $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{x}\,.$$

Es gilt

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} = \infty$$

und

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$$

Links– und rechtsseitiger Grenzwert stimmen nicht überein. Demzufolge hat f bei $x = 0$ keinen Grenzwert und ist nicht stetig. Wir sagen f *existiert nicht bei* $x = 0$.

4. Gegeben ist $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{|x|}\,.$$

Dann gilt

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{|x|} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} = \infty$$

und

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{1}{|x|} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{1}{-x} = \infty$$

Links– und rechtsseitiger Grenzwert stimmen zwar überein aber der Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{|x|} = \infty\,,$$

führt dazu, dass f bei $x = 0$ nicht existiert!

Regel 47: Rechenregeln für Grenzwerte:
Es seien f und g Funktionen, für die gilt

$$\lim_{x\to a} f(x) = c \quad \text{und} \quad \lim_{x\to a} g(x) = d$$

mit $a, c, d \in \mathbb{R}$ und $|c|, |d| < \infty$. Dann gilt:

1. $$\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = c \pm d$$

2. $$\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = c \cdot d$$

3. $$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{c}{d}, \quad \text{falls} \quad d \neq 0$$

Die Rechenregeln für Grenzwerte gelten auch für einseitige Grenzwerte.

Sie können den Grenzwertprozess bei Funktionen auch auf den für Folgen übertragen und die dort erworbenen Kenntnisse über Konvergenz übertragen.

Beispiel 33 Sei $n \in \mathbb{N}_0$

$$\lim_{x\searrow 0} 2^x \underset{x>0}{\overset{x=\frac{1}{n}}{=}} \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}} = 2^0 = 1$$

$$\lim_{x\nearrow 0} 2^x \underset{x<0}{\overset{x=\frac{-1}{n}}{=}} \lim_{n\to-\infty} 2^{\frac{1}{n}} \overset{m=-n}{=} \lim_{m\to\infty} 2^{\frac{-1}{m}} = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2^{\frac{1}{m}}} = \frac{1}{2^0} = 1$$

Kommen wir nun zu einem besonderen Phänomen bei der Grenzwertbildung: Der Limes

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x}$$

führt auf einen Bruch, der sowohl im Zähler als auch im Nenner nach Null strebt. Einen solchen Ausdruck beschreiben wir symbolisch durch

$$\left[\frac{0}{0}\right].$$

Ein Ausdruck dieser Form gibt uns keinerlei Auskunft darüber, ob die Funktion bei $x = 0$ einen Grenzwert hat oder nicht. Wenn wir die Funktion ein wenig umformulieren erhalten wir

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0} x = 0$$

Eine andere Funktion, deren Limes x gegen 0 von der gleichen Form ist, nehmen wir einmal

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2},$$

liefert

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \pm\infty,$$

was ein völlig anderes Ergebnis ist. Es gibt verschiedene solcher Formen, die einer besonderen Behandlung bedürfen. Wir fassen einmal alle in folgender Definition zusammen:

Regel 48: unbestimmter Ausdruck: Als *unbestimmte Ausdrücke* bezeichnen wir Limes, die von folgender Form sind:

$$\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right], [0\cdot\infty], [0^0], [1^\infty], [\infty^0], [\infty-\infty]$$

Beispiel 34 unbestimmte Ausdrücke Beispiele, die auf unbestimmte Ausdrücke führen:

1. $$0 = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2} \rightsquigarrow \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

2. $$2 = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x^2}\cdot x \rightsquigarrow [0\cdot\infty]$$

3. $$a = \lim_{k\to\infty} \left(\sqrt[k]{a}\right)^k \rightsquigarrow [1^\infty]$$

3.4.3 Differentiation von Polynomen

Nachdem wir nun grundsätzliches über Differentiation kennengelernt haben schauen wir uns nun ganz konkret Ableitungen von Polynomen an, denn das sind die Funktionen, die uns in diesem Kapitel hauptsächlich interessieren.

Beispiel 35 Wir betrachten das Polynom

$$p(x) = x^3,$$

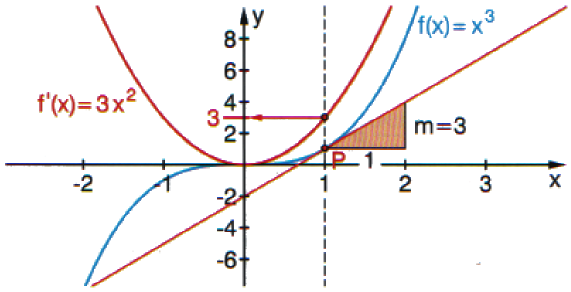


Abbildung 13: Grafische Darstellung der Ableitung der Funktion x^3

welches in Abbildung 13 grafisch dargestellt ist. Sicher wissen Sie, dass die Ableitung dieses Polynoms gegeben ist durch

$$p'(x) = 3x^2\,.$$

Aber warum ist das eigentlich so? Ein einfaches Nachrechnen über den Differenzenquotienten liefert die Antwort. Wir wollen uns einmal davon überzeugen:

$$\begin{aligned}
p'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{p(x+h)-p(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 3x^2 + 3xh + h^2 \\
&= \lim_{h\to 0} 3x^2 + \lim_{h\to 0} 3xh + \lim_{h\to 0} h^2 \\
&= 3x^2 + 0 + 0 \\
&= 3x^2
\end{aligned}$$

Diese Rechnung können wir auch für allgemeine Polynome beliebigen Grades durchführen. Weil laut Ableitungsregeln (siehe Seite 74) die Ableitung einer Summe gleich die Summe der

Ableitungen ist, können wir die Ableitung bei Polynomen summenweise durchführen, sie also in das Summenzeichen hineinziehen und anschließend den Koeffizienten herausnehmen, da dieser nicht von x abhängt:

$$p'(x) = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right)' = \sum_{i=0}^{n} \left(a_i x^i\right)' = \sum_{i=0}^{n} a_i \left(x^i\right)' \tag{11}$$

Wir konzentrieren uns auf x^i und setzen unsere Rechnung später wieder ein:

$$\begin{aligned}\left(x^i\right)' &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^i - x^i}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left((x+h)^i - x^i\right)\end{aligned}$$

mit der Binomischen Formel aus Definition 20 (S. 26) gilt

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} x^{i-k} h^k - x^i\right)$$

wir ziehen den ersten Summanden heraus, da wir diesen mit x^i herauskürzen können

$$\begin{aligned}&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\binom{i}{0} x^i h^0 + \sum_{k=1}^{i} \binom{i}{k} x^{i-k} h^k - x^i\right) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(x^i + \sum_{k=1}^{i} \binom{i}{k} x^{i-k} h^k - x^i\right) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\sum_{k=1}^{i} \binom{i}{k} x^{i-k} h^k\right) \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\sum_{k=1}^{i} \binom{i}{k} x^{i-k} h^{k-1}\right)\end{aligned}$$

wir ziehen den ersten Summanden heraus, da dieser nicht von h abhňgt

$$\begin{aligned}&= \lim_{h\to 0} \left(\binom{i}{1} x^{i-1} h^0 + \sum_{k=2}^{i} \binom{i}{k} x^{i-k} h^{k-1}\right) \\ &= \lim_{h\to 0} \left(i\, x^{i-1} + \sum_{k=2}^{i} \binom{i}{k} x^{i-k} h^{k-1}\right)\end{aligned}$$

$i\,x^{i-1}$ hängt nicht mehr von h ab und kann folglich aus dem Limes herausgezogen werden

$$= i\,x^{i-1} + \lim_{h\to 0}\left(\sum_{k=2}^{i}\binom{i}{k}x^{i-k}h^{k-1}\right)$$

alle Summanden unter dem Summenzeichen werden mit einem h multipliziert, das einen positiven Exponenten hat. Daraus folgt dann, das all diese Summanden gegen Null streben, also

$$= i\,x^{i-1} + 0 = i\,x^{i-1}$$

Setzen wir dieses Ergebnis in den Ausdruck (11) ein, so erhalten wir insgesamt:

Regel 49: Ableitung von Polynomen:

$$p'(x) = \sum_{i=0}^{n} i\,a_i\,x^{i-1}$$

Satz 3.2. *Die $(n+1)$–te Ableitung eines Polynoms vom Grad n verschwindet immer.*

Beweis :

Für das Polynom $p(x)$ vom Grad n, geschrieben

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\,x^i\,,$$

ergeben sich die Ableitungen wie folgt:

$$
\begin{aligned}
p'(x) &= \sum_{i=1}^{n} i\, a_i\, x^{i-1} \\
p''(x) &= \sum_{i=2}^{n} i(i-1)\, a_i\, x^{i-2} \\
p^{(3)}(x) &= \sum_{i=3}^{n} i(i-1)(i-2)\, a_i\, x^{i-3} \\
&\vdots \\
p^{(k)}(x) &= \sum_{i=k}^{n} i(i-1)\cdots(i-k+1)\, a_i\, x^{i-k} \\
&\vdots \\
p^{(n)}(x) &= \sum_{i=n}^{n} i(i-1)\cdots(i-n+1)\, a_i\, x^{i-n} = n(n-1)\cdots(1)\, a_n\, x^0 = n! a_n\,,
\end{aligned}
$$

was nicht mehr von x abhängt, also folgt

$$p^{(n+1)} = 0\,.$$

□

Beispiel 36

$$p(x) = 2x^3 - 2x = 2x(x-1)(x+1)$$

Hat die Ableitungen

$$
\begin{aligned}
p'(x) &= 6x^2 - 2 \\
p''(x) &= 12x \\
p^{(3)}(x) &= 12 \\
p^{(4)}(x) &= 0
\end{aligned}
$$

Dieses Polynom wollen wir skizzieren. Dabei geht man so vor, dass man die wesentlichen Charakteristika des Polynoms sammelt. Wir kennen schon die Nullstellen:

$$N_1 = (-1, 0)\,, \quad N_2 = (0, 0) \quad \text{und} \quad N_3 = (1, 0)$$

Im nächsten Schritt wollen wir das Verhalten im Unendlichen betrachten. Dazu machen wir eine kleine Umformulierung:

$$p(x) = 2x^3 - 2x = 2x^3\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

Dadurch wird klar, dass das Verhalten des Polynoms im Unendlichen über den Term mit dem höchsten Exponenten bestimmt wird, denn es gilt

$$\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \lim_{x\to\pm\infty} 2x^3\left(1 - \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} 2x^3$$

Es ist immer

$$\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n\,.$$

Die Ableitung oder auch erste Ableitung $f'(x)$ von $f(x)$ nennen wir auch Ableitung erster Ordnung. Unter einer zweiten Ableitung oder auch Ableitung zweiter Ordnung verstehen wir die Ableitung der Ableitung von $f(x)$:

$$f''(x) := \lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

Führen wir dies sukzessive fort erhalten wir die Ableitung n–ter Ordnung durch

$$f^{(n)} := \lim_{h\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x+h) - f^{(n-1)}(x)}{h}\,.$$

Notation: Eine analoge Schreibweise für die n–te Ableitung der Funktion $f(x)$ ist wieder durch die Leibnizsche Symbolik gegeben, nämlich

$$\frac{d^n}{dx^n}f(x) \quad \text{oder auch} \quad \frac{d^n f}{dx^n}(x)\,.$$

Da Ableitungen über Grenzwerte definiert sind, lassen sich die Rechenregeln für Grenzwerte auch formulieren zu

Regel 50: Rechenregeln für Ableitungen:

$$\begin{aligned}
(f(x) \pm g(x))' &= f'(x) \pm g'(x) & \\
(f(x)\cdot g(x))' &= f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x) & \text{(Produktregel)} \\
\left(\tfrac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \tfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}\,, \quad g(x) \neq 0 & \text{(Quotientenregel)}
\end{aligned}$$

Wir hatten eine geometrische Interpretation der Tangente und momentanen Änderungsrate, die wir fortan Ableitung nennen wollen, bereits betrachtet. Mit dem Grenzwertbegriff können wir nun zusätzlich noch eine analytische Interpretation angeben: Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

Die Tangente an $f(x)$ ist etwas lineares und hat demzufolge die Form

$$g(x) = mx + c\,.$$

Am Punkt x_0 stimmt der Wert von g mit dem von f überein, also gilt

$$g(x) = m(x - x_0) + f(x_0)\,.$$

Der Fehler $f(x) - g(x)$ strebt gegen Null, wenn x nach x_0 strebt und zwar schneller als $x - x_0$ nach Null strebt. Damit gilt

$$0 = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - m(x - x_0) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - m$$

Daraus folgt dann

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m$$

und somit für die Darstellung der Tangente

$$g(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Wir halten fest:

Regel 51: Tangente an f im Punkt $(x_0, f(x_0))$:

$$T_f(x, x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

In der Nähe von $(x_0, f(x_0))$ ist diese lineare Funktion eine "gute" Approximation an die Funktion f. Was auch immer "gut" heißt. In der Praxis ist es häufig so, dass die gegebene Funktion recht unhandlich ist, vielleicht hochgradig nichtlinear, dann bedient man sich gerne in einer Situation, die kleine Fehler erlaubt, einer einfacher gestrickten Approximation. Weiteres dazu erfahren wir in Kapitel 8.2.

3.4.4 Extrema und Wendepunkte von Polynomen

Wir starten gleich mit neuen Begriffen:

Regel 52: Extrema: Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$. Wir sagen eine Funktion f hat in $a \in D$ ein *globales Maximum (Minimum)*, wenn

$$\forall x \in D\, x \neq a \;:\; f(x) \leq f(a) \qquad\qquad (f(x) \geq f(a))\,.$$

Es sei $U_\epsilon(b) := (b - \epsilon, b + \epsilon)$ eine offene Umgebung von b. $b \in D$ heißt *lokales Maximum (Minimum)*, wenn gilt

$$\exists \epsilon > 0\, \forall x \in U_\epsilon(b) \cap D \;:\; f(x) \leq f(b) \qquad\qquad (f(x) \geq f(b))\,.$$

Kandidaten für Extrema sind:

1. Randpunkte des Definitionsbereichs
2. Stellen, an denen f nicht stetig ist (für Polynome jetzt nicht so relevant)
3. stationäre Punkte, das heißt Stellen, an denen die erste Ableitung verschwindet.

Der Begriff "stationäre Punkte" kommt daher, dass an diesen Stellen die momentane Änderungsrate (Ableitung) verschwindet (siehe Abbildung 14). Es ist einsichtig wenn man bei Änderungsrate an zeitabhängige Prozesse denkt, für die dann bei so einer Stelle für einen Moment Stillstand herrscht.

Bei Extremstellen im Innern des Definitionsbereichs und abseits von Unstetigkeitsstellen ist die Tangente eine konstante Funktion mit Steigung Null. Um eine Extremstelle zu ermitteln, müssen wir die Nullstelle(n) der ersten Ableitung bestimmen. Wir können das ja an unserem Beispiel machen:

$$p'(x) = 6x^2 - 2$$

hat die Nullstellen

$$\left\{ \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}\,.$$

Woher wissen wir nun, ob es sich um ein Maximum oder Minimum handelt? Wir ermitteln das geometrisch am Bild in Abbildung 15:

Bei einem Maximum wechselt die Steigung der Tangente von einem positiven Wert über Null zu einem negativen Wert. Das bedeutet, dass die Steigung von p' (also p'') negativ ist.

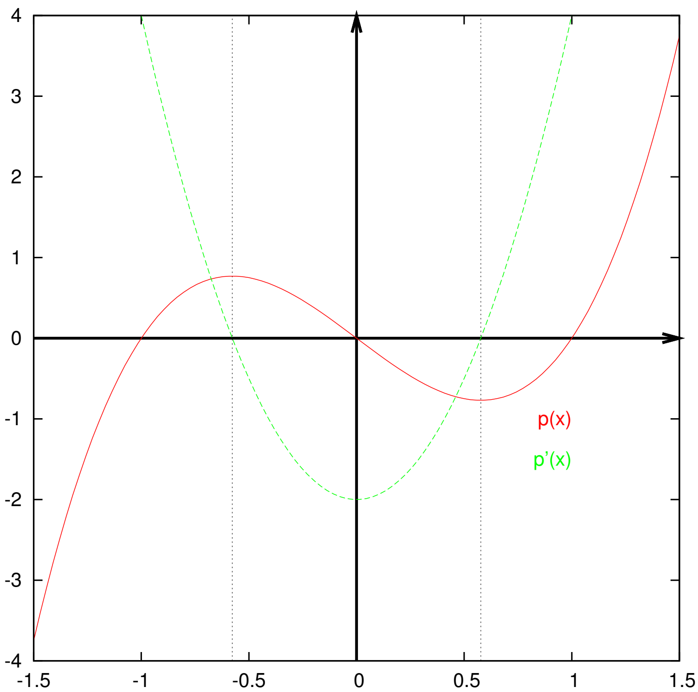


Abbildung 14: Extrema eines Polynoms und die Nullstellen dessen Ableitung

Bei einem Minimum hingegen wechselt die Steigung der Tangente von einem negativen Wert über Null zu einem positiven Wert. Das bedeutet, dass die Steigung von p' (also p'') positiv ist.

Da stellt sich natürlich sofort die Frage, was passiert, wenn für ein x mit $p'(x) = 0$ gilt, dass auch $p''(x) = 0$ ist? Betrachten wir die beiden Beispiele

$$p(x) = x^3 \quad \text{und} \quad q(x) = x^4\,,$$

zu besichtigen in Abbildung 16.

$$\begin{array}{rclcrclrcl}
p(x) &=& x^3 & & & & q(x) &=& x^4 & & \\
p'(x) &=& 3\,x^2 & \Rightarrow & p'(0) = 0 & & q'(x) &=& 4\,x^3 & \Rightarrow & q'(0) = 0 \\
p''(x) &=& 6\,x & \Rightarrow & p''(0) = 0 & & q''(x) &=& 12\,x^2 & \Rightarrow & q''(0) = 0 \\
p^{(3)}(x) &=& 6 & & & & q^{(3)}(x) &=& 24\,x & & \\
p^{(4)}(x) &=& 0 & & & & q^{(4)}(x) &=& 24 & & \\
& & & & & & q^{(5)}(x) &=& 0 & &
\end{array}$$

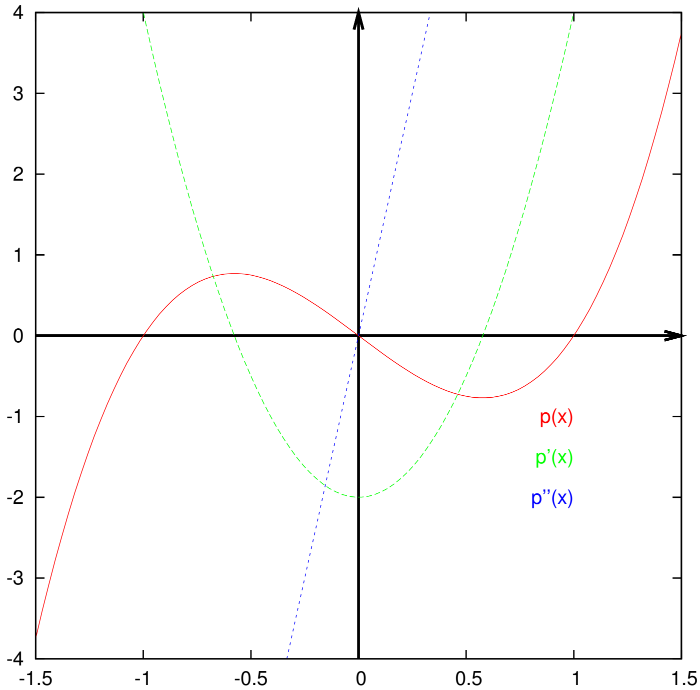


Abbildung 15: Extrema eines Polynoms,die Nullstellen dessen erster und zweiter Ableitung

Das Verschwinden der ersten Ableitung ist eine notwendige Bedingung für ein Extremum, nicht aber eine hinreichende.

Beide Funktionen haben die Eigenschaft, dass bei einem potentiellen Extremum auch die zweite Ableitung verschwindet. Dennoch unterscheiden sich die Graphen. In Abbildung 16 kann man sehen, dass $q(x)$ im Gegensatz xu $p(x)$ in $x = 0$ sehr wohl ein Extremum, nämlich Minimum besitzt. Zunächst halten wir fest, dass die Tatsache, dass die erste Ableitung verschwindet lediglich ein *notwendiges* Kriterium ist. Es muss erfüllt sein, führt aber noch nicht zur Existens eines Estremums. Was also sind die *hinreichenden* Kriterien (abgesehen von der in Regel 53)?

Wenn das kleinste n für das gilt

$$p^{(n)}(0) \neq 0 \quad \wedge \quad p^{(n+1)}(x) = 0$$

eine ungerade Zahl ist, so liegt bei $p^{(n)}(0) > 0$ ($p^{(n)}(0) > 0$) ein lokales Minimum (Maximum) vor. Ist dieses n gerade, so liegt kein Extremum vor.

Wir fassen das zusammen:

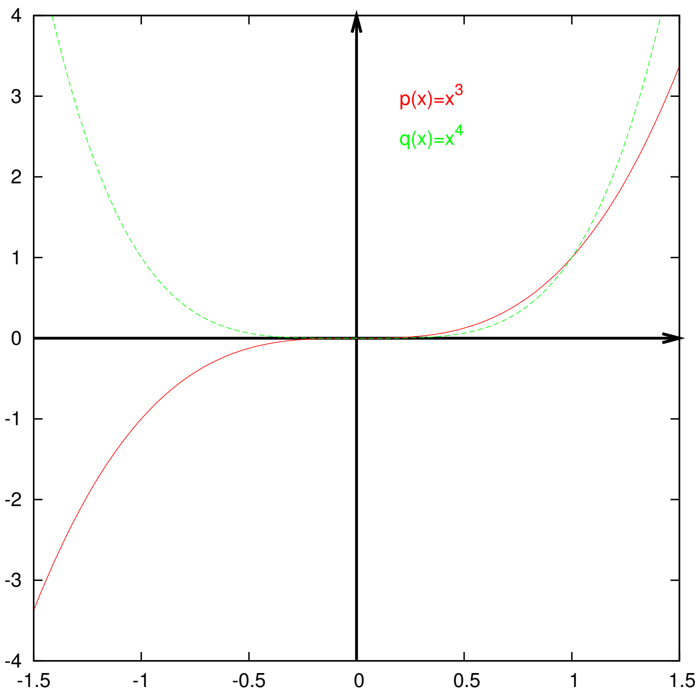


Abbildung 16:

Regel 53: (lokale) Maxima und Minima: Die Funktion $p(x)$ hat bei x_0 ein lokales Minimum (Maximum), falls sowohl hinreichende als auch notwendige Kriterien erfüllt sind.
Notwendiges Kriterium:

$$p'(x_0) = 0$$

Hinreichende Kriterien: (eines davon muss erfült sein)

- $p''(x_0) \neq 0$. Es ist dann x_0 mit

  $p''(x_0) \quad < 0$ ist (lokales) Maximum und mit
  $p''(x_0) \quad > 0$ ist (lokales) Minimum.

- Die erste Ableitung hat ein Vorzeichenwechsel bei x_0, das heißt es gilt

  $$p'(x_0 - \epsilon) \cdot p'(x_0 + \epsilon) < 0$$

  für ein ϵ, das klein genug ist. Dann weiss man, dass

  bei $p'(x_0 - \epsilon) \quad > 0$ ein lokales Maximum vorliegt und
  bei $p'(x_0 - \epsilon) \quad < 0$ ein lokales Minimum vorliegt.

- Wenn das kleinste $n \in \mathbb{N}$, für das gilt

  $$p^{(n)}(x_0) \neq 0 \quad \wedge \quad p^{(n+1)}(x) = 0 \qquad \forall x$$

  eine ungerade Zahl ist so liegt

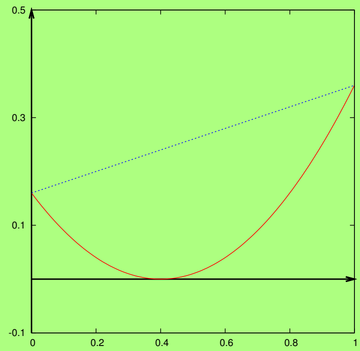
  bei $p^{(n)}(x_0) \quad > 0$ ein lokales Minimum und
  bei $p^{(n)}(x_0) \quad < 0$ ein lokales Maximum vor.

Die zweite Ableitung einer Funktion $p(x)$ wechselt vom Negativen in's Positive genau dann, wenn $p(x)$ von einer Rechtsbiegung in eine Linksbiegung wechselt. Das ist noch mal eine besondere Stelle, die einer erneuten Definition würdig ist.

Regel 54: konvex/konkav:

Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt *konvex (konkav)*, wenn gilt: $\forall x_1, x_2 \in I \; \forall \lambda \in (0,1)$:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \overset{(\geq)}{\leq} \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$



Es gilt also:

$$\left. f'' \right|_I \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f \text{ konvex}$$
$$\left. f'' \right|_I \leq 0 \quad \Rightarrow \quad f \text{ konkav}$$

($\left. f \right|_I$ heißt f eingeschränkt auf das Intervall I.)

Regel 55: Wendepunkt: Der Punkt, bei dem die zweite Ableitung ihr Vorzeichen ändert, das heißt bei dem für ein $\epsilon > 0$

$$f''(x_0 - \epsilon) \cdot f''(x_0 + \epsilon) < 0 \quad \text{und} \quad f''(x_0) = 0$$

gilt, heißt *Wendepunkt* von f.

Mit den Funktionseigenschaften, die wir bisher besprochen haben können wir von einem gegebenen Polynom eine Skizza anfertigen.

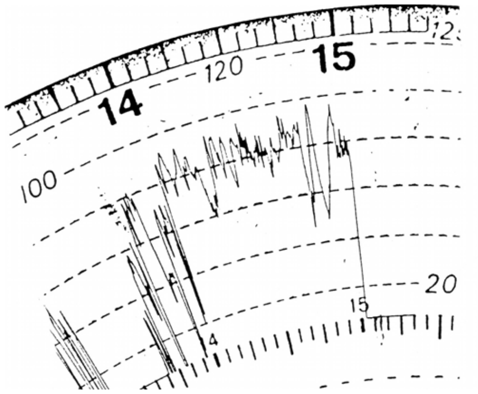
Regel 56: Eine Skizze eines Polynoms wird erstellt über die folgenden Informationen:

1. Nullstellen
2. asymptotisches Verhalten
3. Extrema
4. Wendepunkte

3.5 Integration I

3.5.1 unbestimmte Integration und Stammfunktionen

Wir wollen uns mit der Fragestellung auseinandersetzen, ob man eine Funktion, deren Änderungsrate in jedem Punkt eines Intervalls bekannt ist, rekonstruieren kann. Wir stehen also vor folgendem Problem: Es ist eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ gegeben, von der wir wissen, dass sie die Ableitung einer zunächst noch unbekannten Funktion F ist: $f = F'$ auf I. Gesucht ist F.



Beispiel 37 Fahrtenschreiber

Betrachten wir einmal das folgende Beispiel: Ein Fahrtenschreiber eines LKWs zeichnet im Verlaufe des Vormittags – 8.00 Uhr bis 12.00 Uhr – die gefahrene Geschwindigkeit des LKWs auf:

Zeit $[t] = h$	0.00	0.44	0.89	1.33	1.78	2.22	2.67	3.11	3.56	4.00
Geschw. $[f(t)] = \frac{km}{h}$	52.50	53.15	55.09	58.33	62.87	68.70	75.83	84.26	93.98	105

Wir machen eine Polynominterpolation durch die Messpunkte und erhalten die Funktion

$$f(t) = \frac{105}{2}\left(1 + \frac{1}{16}t^2\right) .$$

Wenn wir aber nun eigentlich daran interessiert sind, zu erfahren wann der LKW–Fahrer wieviel Kilometer zurückgelegt hat, so benötigen wir diejenige Funktion, deren Ableitung gerade $f(t)$ ist; also der Geschwindigkeitsmessung entspricht (siehe Abb. 17). Gesucht ist also eine Funktion $F(t)$ mit

$$F'(t) = f(t) .$$

Im Grunde ist das, was wir suchen die Umkehrung der Ableitung. Wir nennen die Funktion, die sich aus eben dieser Umkehrung ergibt Stammfunktion und machen dazu folgende Definition:

Regel 57: Stammfunktion: F heißt *Stammfunktion* zu f auf dem Intervall I, wenn $\forall\, x \in I$:

$$F'(x) = f(x) .$$

Eine Stammfunktion ist ohne Weiteres nicht eindeutig bestimmt: Aus einer Stammfunktion $F_0(x)$ zu $f(x)$ auf I erhält man alle weiteren Stammfunktionen in der Form $F(x) = F_0(x) + C$ mit willkürlichen C, da eine Konstante bei der Ableitung verschwindet.

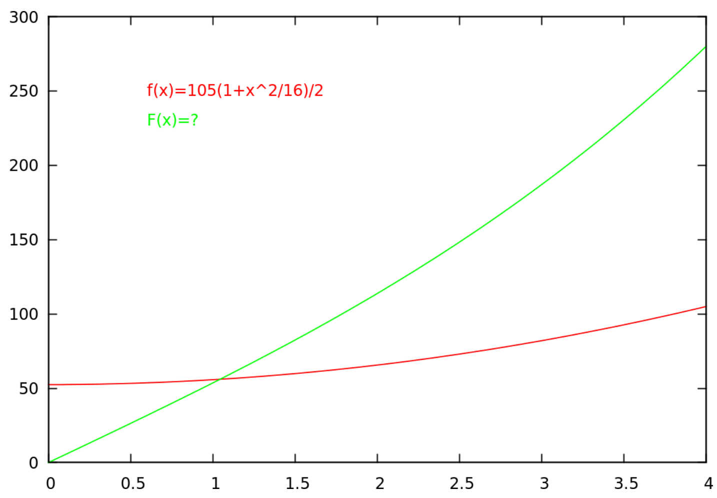


Abbildung 17: Gesucht ist die Stammfunktion der Geschwindigkeitsbeschreibung

Je nach Situation ist das freie C dann noch zu bestimmen. Wir werden das gleich anhand unseres Beispiels sehen. Erst klären wir noch die entsprechenden Notationen für unser neues "Werkzeug".

Regel 58: unbestimmtes Integral: Ist F auf dem Intervall I eine Stammfunktion zu der Funktion f, gilt also

$$F'(x) = f(x)$$

für alle $x \in I$, so sagen wir auch F sei ein *unbestimmtes Integral* von f auf I. Unbestimmte Integrale bezeichnet man seit Leibniz mit den Symbolen

$$\int f(x)\,dx \quad \text{oder} \quad \int f\,dx\,.$$

Wir sagen *Integral* f *von* x dx oder *Integral* f dx. f bezeichnen wir als *Integranden* und x als *Integrationsvariable*.

Wir halten fest, dass das unbestimmte Integral die Umkehrung der Ableitung ist und deshalb gilt

$$\int F'\,dx = F\,.$$

Das unbestimmte Integral ist wiederrum eine Funktion, die von der Variablen x abhängt.

Wie lassen sich nun Stammfunktionen von Polynomen berechnen? Wir wissen wie die Ableitung eines Polynoms berechnet wird, nämlich

$$(x^n)' = nx^{n-1}\,.$$

Das ist äquivalent zu

$$x^{n-1} = \frac{1}{n}\,(x^n)'$$

Und das genügt schon, um unbestimmte Integrale von Polynomen berechnen zu können:

Regel 59: Stammfunktion (unbestimmtes Integral) eines Polynoms:

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}\,, \qquad \text{für } n \geq 0$$

Jede Funktion der Form $\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$ ist Stammfunktion von x^n. Es gibt also unendlich viele Stammfunktionen. Wir sagen deshalb auch eine Stammfunktion und nicht die Stammfunktion.

Der Kilometerstand des Fahrtenschreibers aus unserem LKW–Fahrer Beispiel 37 berechnet sich demnach so:

$$F(t) = \int f(t)\,dt + C = \int \frac{105}{2}\left(1 + \frac{1}{16}t^2\right)\,dt + C = \frac{105}{2}\left(t + \frac{1}{48}t^3\right) + C$$

Da der LKW–Fahrer morgens losgefahren ist, der Kilometerstand bei $t = 0$ also auf Null stand gilt weiter

$$F(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C = 0\,,$$

woraus sich die Funktion $F(t)$ für den Kilometerstand durch

$$F(t) = \frac{105}{2}\left(t + \frac{1}{48}t^3\right)$$

berechnet. Angenommen die Aufzeichnungen seien am Nachmittag gemacht worden und der Fahrer habe bereits $200km$ am Vormittag zurückgelegt, so dass zum Startzeitpunkt $F(0) = 200$ gelte, so berechnete sich die Konstante durch

$$F(0) = 200 \quad \Leftrightarrow \quad C = 200\,,$$

woraus sich

$$F(t) = \frac{105}{2}\left(t + \frac{1}{48}t^3\right) + 200$$

ergäbe.

Im Übrigen erhalten wir alle gefahrenen Kilometer in diesem Zeitraum über die Differenz der Kilometerzahl zum Endzeitpunkt mir der zum Startzeitpunkt:

$$\begin{aligned}\text{Gesamtkilometerzahl} &= F(4) - F(0)\\ &= \frac{105}{2}\left(4 + \frac{1}{48}4^3\right) + 200 - 200\\ &= \frac{105}{2}\left(4 + \frac{1}{48}4^3\right)\end{aligned}$$

(offensichtlich spielt die Anzahl der Startkilometer keine Rolle!)

$$\begin{aligned}&= \frac{105}{2}\left(4 + \frac{4}{3}\right)\\ &= \frac{105}{2}\frac{16}{3} = 280\end{aligned}$$

Der LKW–Fahrer ist also 280 km gefahren, ganz gleich wie hoch die Kilometerzahl zum Startzeitpunkt gewesen ist. C kürzt sich raus.

Regel 60: Weitere Stammfunktionen in diesem Kontext:
Negative Exponenten $n \neq 1$:

$$\int x^{-n}\,dx = \frac{1}{1-n}x^{1-n}$$

Rationale Exponenten $n = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \ \wedge \ q \neq 0 \ \wedge \ n \neq -1$:

$$\int x^{\frac{p}{q}}\,dx = \frac{q}{p+q}x^{\frac{p+q}{q}}$$

Wir setzen schon einmal direkt zwei Integrationsregeln auf:

Regel 61: Regeln der unbestimmten Integration:
Das integral ist linear, das heißt für $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int (\alpha f + \beta g)\,dx = \alpha \int f\,dx + \beta \int g\,dx\,.$$

Wir schließen dieses Kapitel mit einer kleinen physikalischen Interpretation. Die Zeichen [ ] geben die physikalische Größe dessen an, was in sie eingeschlossen ist, dann gilt für unser LKW–Beispiel:

Zeit	t :	$[t] = h$	(Stunde)
Geschwindigkeit	f :	$[f] = \left[\frac{F(x_1)-F(x_2)}{x_1-x_2}\right] = \frac{[F(x_1)-F(x_2)]}{[x_1-x_2]} = \frac{km}{h}$	(Kilometer pro Stunde)
Kilometerstand	F :	$[F] = [\int f(t)\, dt] = [f] \underbrace{[dt]}_{\text{Zeitintervall}} = km$	(Kilometer)

Oder erinnern wir uns an das Beispiel mit dem Radfahrer, der über die Berge fährt (siehe Abbildung 8). Entweder messen wir mit f wieviel Höhe er gewinnt je nach gefahrener Strecke:

Weg	x :	$[x] = m$	(Meter)
Höhe	f :	$[f] = m$	(Meter)
Steigung	f' :	$[f'] = \frac{m}{m} = 1$	(dimensionslos)

oder wieviel Höhe er gewinnt je nach gefahrener Zeit:

Zeit	t :	$[t] = h$	(Stunde)
Höhe	f :	$[f] = m$	(Meter)
Änderungsrate	f' :	$[f'] = \frac{m}{h}$	(Meter pro Stunde)

3.5.2 bestimmte Integration und Flächeninhalt

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine in $[a, b]$ stetige Funktion. Wir wollen den Flächeninhalt A berechnen, der von f, der x–Achse und den Geraden $x = a$ und $x = b$ eingeschlossen wird. Abbildung 18 zeigt einen entsprechenden Bereich. Wir könnten diesen Flächeninhalt näherungsweise bestimmen, indem wir ein Raster aus Vierecken darüber legen, die Kästchen zählen, die ganz enthalten sind und diejenigen schätzen, die von der Kurve zerschnitten wurden. Bei aller Mühe, die wir uns jetzt machen werden, um auf elegante Weise analytische Berechnungen anstellen zu können, werden Ihnen ganz ähnliche Näherungsmethoden in der Numerik wieder begegnen. Man nennt das dann Quadraturformel. Aber zurück zur Analysis! Wir nähern uns an den gesuchten Flächeninhalt, indem wir das Intervall $[a, b]$ in n Teilintervalle zerlegen mit $a = x_0$, $b = x_n$

$$[a, b] = [a, x_1] \cup [x_1, x2] \cup \cdots \cup [x_{n-2}, x_{n-1}] \cup [x_{n-1}, b] = \bigcup_{i=0}^{n-1} [x_i, x_{i+1}] .$$

Jedes Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ hat eine Länge von $\frac{b-a}{n}$. n sei so gewählt, dass die Funktion f eingeschränkt auf ein Teilintervall sein globales Minimum und Maximum auf den Intervallgrenzen annimmt.

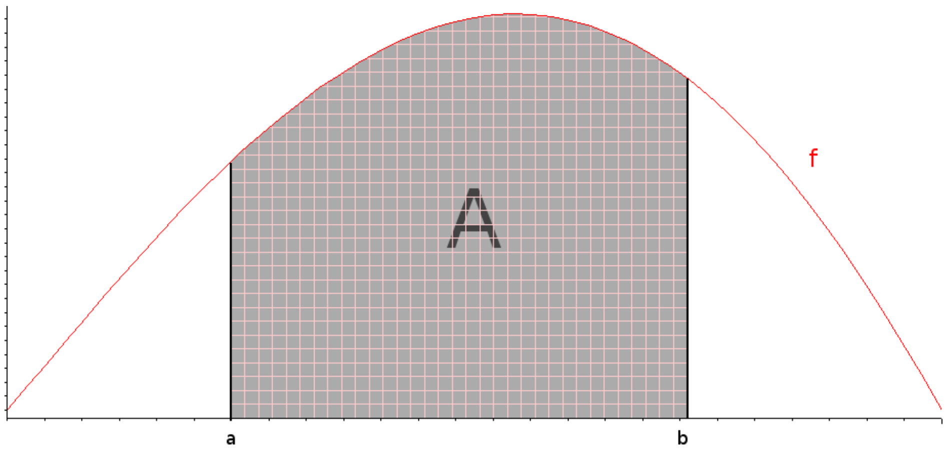


Abbildung 18: Fläche begrenzt durch f, $x = 1$, $x = b$ und der x–Achse

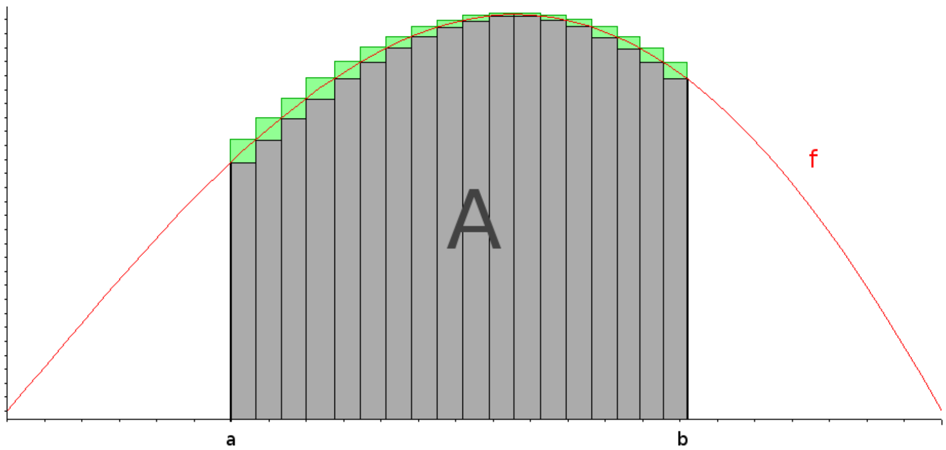


Abbildung 19: Bildung von Teilintervallen zur approximativen Flächenberechnung

m_i sei das Minimum und
M_i das Maximum von $f(x)$ auf $[x_i, x_{i+1}]$

Wir bilden nun Obersumme S_n und Untersumme s_n. s_n beschreibe den Flächeninhalt der grauen Fläche in Abbildung 19 und S_n den der grauen und grünen Fläche zusammen. Dann gilt für die beiden Summen:

$$S_n := M_0 \frac{b-a}{n} + \cdots + M_{n-1} \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} M_i$$

$$s_n := m_0 \frac{b-a}{n} + \cdots + m_{n-1} \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} m_i$$

S_n nähert sich von oben und s_n von unten an den gesuchten Flächeninhalt heran:

$$s_n \leq A \leq S_n$$

Je größer wir n wählen, desto besser ist die Approximation. So die Hoffnung.

Regel 62: **Riemann–Integral:** Für die Funktion $f : [x_0, x_n] \to \mathbb{R}$ und die Zerlegung des Intervalls

$$[x_0, x_n] = \bigcup_{i=0}^{n-1} [x_i, x_{i+1}]$$

seien mit

$$(m_i, M_i) := \Big(\min_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x), \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) \Big)$$

die Folgen "Obersumme S_n" und "Untersumme s_n"

$$S_n := \frac{x_n - x_0}{n} \sum_{i=0}^{n-1} M_i$$

$$s_n := \frac{x_n - x_0}{n} \sum_{i=0}^{n-1} m_i$$

gegeben. Haben die Summen S_n und s_n einen gemeinsamen Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} s_n = A$$

so heißt f *Riemann–integrierbar* oder *R–integrierbar* und das bestimmte Integral der Funktion f von a bis b

$$A = \int_a^b f(x)\, dx$$

heißt *Riemann–Integral.*

Stetige Funktionen sind Riemann–integrierbar. Das heißt aber nicht, dass nicht stetige Funktionen nicht Riemann–integrierbar sind. Nur eben nicht alle.

Wie kann man nun elegant bestimmte Integrale berechnen? Wir sind uns wohl einig, dass die Methode der Summenbildung einsichtig ist, aber doch unter Umständen recht unbequem. Ja und was hat das unbestimmte Integral aus dem letzten Kapitel mit dem bestimmten zu tun? Immerhin heißt es auch Integral. Der Zusammenhang zwischen diesen beiden Integralbegriffen wird durch den nachfolgenden Satz beschrieben, der einer der Kernaussagen in der Analysis darstellt. Wichtige Sätze haben Namen und so auch dieser:

Regel 63: Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung: Ist $F(x)$ eine Stammfunktion der stetigen Funktion $f(x)$, also gilt $F(x)' = f(x)$, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Wir können also Berechnungen von bestimmten Integralen auf Berechnungen von Stammfunktionen zurückführen.

Dieser Zusammenhang ist nicht direkt ersichtlich. Den Beweis dieses Satzes besprechen wir nicht aber wir werden uns den Sachverhalt plausibel machen:

Geometrische Interpretation:
Es sei f eine lineare Funktion (siehe Abbildung 20) mit der Darstellung

$$f(x) = mx + c\,.$$

Eine Stammfunktion von f ist dann gegeben durch

$$F(x) = \frac{1}{2}mx^2 + cx\,.$$

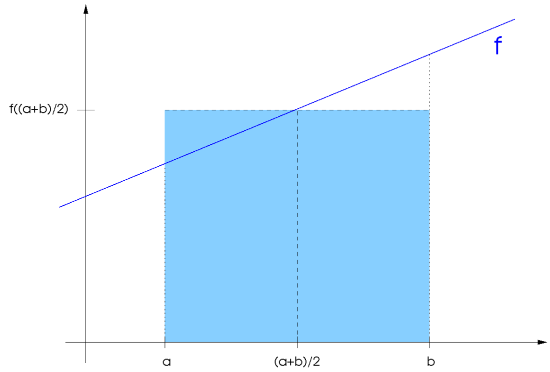


Abbildung 20: Flächeninhalt unter einer linearen Funktion

Auch ohne Stammfunktion können wir den Flächeninhalt unter f direkt berechnen:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)\\ &= \left(m\left(\frac{a+b}{2}\right)+c\right)(b-a)\end{aligned}$$

Da die Steigung der Geraden gerade $m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ist gilt weiter

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2}m(b+a)(b-a) + c(b-a)\\ &= \frac{1}{2}m(b^2-a^2) + c(b-a)\\ &= \left(\frac{1}{2}mb^2 + cb\right) - \left(\frac{1}{2}ma^2 + ca\right)\end{aligned}$$

und das ist gerade

$$= F(b) - F(a)\,.$$

Das klappt. Betrachten wir nun eine beliebige, stetige Funktion. Wir zerlegen das Intervall $[a, b]$ in n Teilintervalle, so wie wir es bei der Bildung der Ober– und Untersumme getan haben. Dieses Mal bilden wir auf allen Intervallen Trapeze, indem wir die Punkte $(x_i, f(x_i))$ jeweils mit $(x_{i+1}, f(x_{i+1})$ verbinden. Jedes einzelne Trapez behandeln wir nun wie im obigen Beispiel.

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \\
&\approx \sum_{i=0}^{n-1} \left(F(x_{i+1}) - F(x_i)\right) \\
&= F(x_1) - F(x_0) + F(x_2) - F(x_1) + F(x_3) - F(x_2) + \cdots \\
&\quad \cdots + F(x_{n-2}) - F(x_{n-3}) + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) \\
&= \cancel{F}(x_1) - F(x_0) + F(x_2) - F(x_1) + F(x_3) - F(x_2) + \cdots \\
&\quad \cdots + F(x_{n-2}) - F(x_{n-3}) + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) \\
&= F(x_{n-1}) - F(x_0) = F(b) - F(a)
\end{aligned}$$

Beispiel 38

Wir berechnen den Flächeninhalt, der Fläche, die durch $x = 0$, $x = 1$, der x–Achse und der Funktion

$$f(x) = x^2$$

eingeschlossen ist. Wir bilden Teilintervalle wie oben, dann ist mit $h := \frac{1}{n}$

$$x_i = i \cdot h \quad \text{und} \quad x_{i+1} = (i+1) \cdot h$$

Die Untersumme ist

$$\begin{aligned}
s_n &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} m_i^2 = \frac{h^2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{1}{n^3} \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \\
&= \frac{(n^2-n)(2n-1)}{6n^3} = \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6n^3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}
\end{aligned}$$

woraus sich der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{3}$$

ergibt. Nun noch die Obersumme

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} M_i^2 = \frac{h^2}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)^2 = \frac{h^2}{n}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{h^2}{n}\sum_{i=0}^{n} i^2$$
$$= \frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n^2+n)(2n+1)}{6n^3} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3} = \frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}$$

Wir erhalten für die Obersumme den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{3}$$

Der Grenzwert der Obersumme stimmt mit dem der Untersumme überein, also ist die Funktion $f(x) = x^2$ Riemann–integrierbar und der zu berechnende Flächeninhalt beträgt $1/3$. Der Weg über die Stammfunktionsberechnung geht so: Eine Stammfunktion von $f(x) = x^2$ ist gegeben durch

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 .$$

Damit und dem HDI berechnen wir das bestimmte Integral

$$\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3} .$$

Das ging schon schneller.

Wegen des HDI (Regel 63) können wir natürlich auch die Berechnung der Stammfunktion auf die Berechnung des bestimmten Integrals zurückführen, für den Fall, was doch spürbar häufig vorkommt, dass eine Stammfunkt in geschlossener Darstellung nicht bekannt ist:

$$F(x) = \int_a^x f(y)\,dy + F_a$$

Ist nun die Stammfunktion zu f nicht bekannt, so kann diese Näeherungsweise über sogenannte Quadraturformeln berechnet werden. Quadraturformeln sind spezielle, endliche Summenformeln, die je nach Charakteristika von f aufgestellt werden und mehr oder weniger gute Approximationseigenschaften haben. Es gibt Quadraturformeln, die sind exakt, das heißt sie stellen den Integralwert ohne Fehler über eine endliche Summe dar. Cool, oder? Ist aber Thema der Numerik.

Regel 64: Regeln der bestimmten Integration:
Das integral ist linear, das heißt für $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)\, dx = \alpha \int_a^b f\, dx + \beta \int_a^b g\, dx\,.$$

Das Integral auf $[x_0, x_n]$ läßt sich in die Summe von n Integralen auf $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, \ldots, n-1)$ mit $[x_0, x_n] = \bigcup_{i=0}^{n-1} [x_i, x_{i+1}]$ zerlegen:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\, dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx$$

Das bestimmte Integral erhält ein negatives Vorzeichen für Bereiche bei denen f negativ ist. Siehe Abbildung 21. Wir müssen also darauf achten, ob lediglich ein Integral berechnet werden soll oder wirklich nach dem Flächeninhalt gefragt wurde. Ein Flächeninhalt ist immer etwas positives.

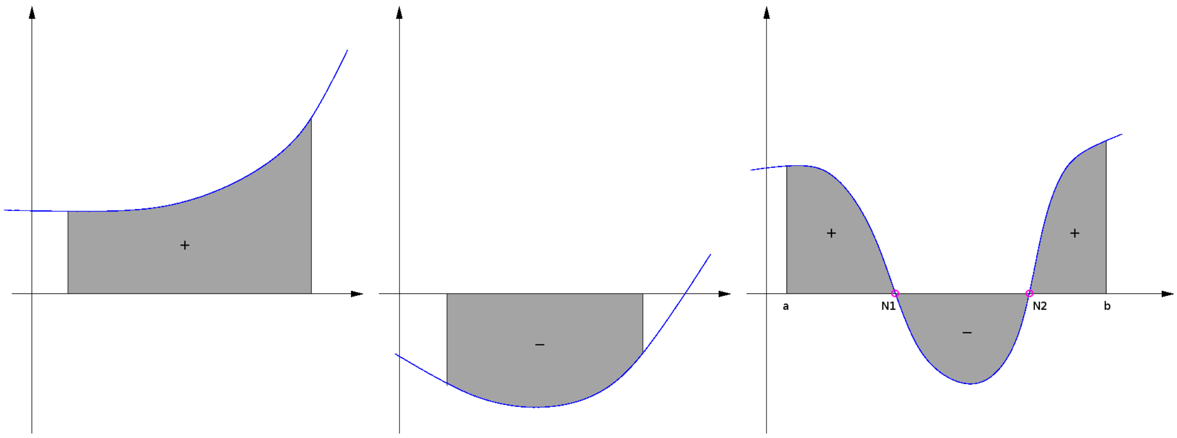


Abbildung 21: Vorzeichen bei der Flächenberechnung

Im Beispiel ganz rechts von Abbildung 21 müssen zunächst die Nullstellen der Funktion bestimmt werden. Durch Einsetzen von Werten links und rechts der Nullstellen, stellen wir fest in welchen Bereichen die Funktion positiv und in welchen negativ ist. Das Integral berechnen wir, indem wir Integrale über die einzelnen Bereiche berechnen, mit entsprechenden Vorzeichen versehen und dann aufaddieren:

$$A = \int_a^{N1} f(x)\, dx - \int_{N1}^{N2} f(x)\, dx + \int_{N2}^{b} f(x)\, dx$$

Beispiel 39

1. Der Flächeninhalt, der von der Funktion $f(x) = x$ und $g(x) = x^2$ eingeschlossen ist wird so berechnet: Zunächst finde die Schnittpunkte der beiden Funktionen:

$$f(x) - g(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x(1-x) = 0$$

Dazwischen gilt

$$f(0.5) = 0.5 > 0.25 = g(0.5)\,.$$

Also erhalten wir den gesuchten Flächeninhalt, indem wir den Flächeninhalt unter f mit dem unter g subtrahieren (siehe Abbildung 22:

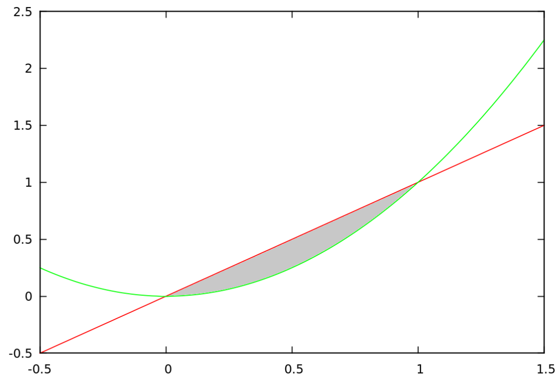


Abbildung 22: Flächeninhalt zwischen zwei Funktionen

$$A = \int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 f(x) - g(x)\,dx = \int_0^1 x - x^2\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

2. Welchen Flächeninhalt hat das durch folgende Ungleichung beschriebene Gebiet?

$$2y \geq x^3 \qquad \wedge \qquad y \leq 4.5x \qquad \wedge \qquad x \geq 0\,?$$

Die entsprechende Fläche ist in Abbildung 23 dargestellt. Wir machen an dieser Stelle

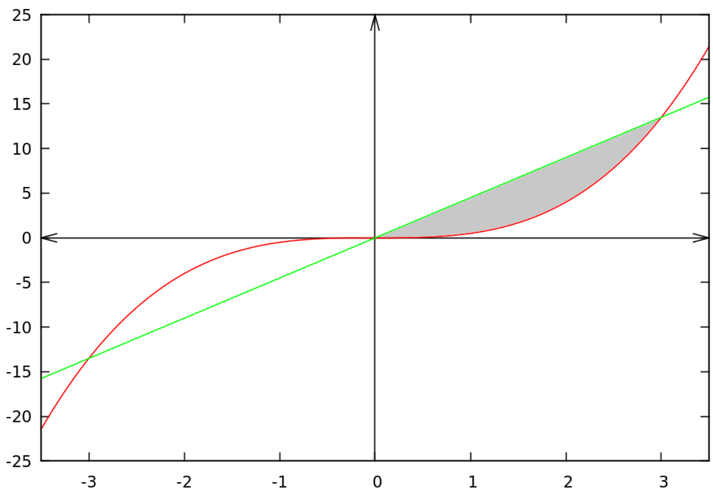


Abbildung 23: Flächeninhalt zwischen zwei Funktionen

das gleiche wie in Beispiel 2., nur, dass wir noch $x \geq 0$ berücksichtigen müssen. Wie lauten die Funktionen?

$$f(x) = 4.5x \qquad \text{und} \qquad g(x) = \frac{1}{2}x^3$$

Wo sich die beiden Funktionen schneiden finden wir durch Lösen der Gleichung

$$f(x) - g(x) = 4.5x - \frac{1}{2}x^3 = x(4.5 - \frac{1}{2}x^2) = \frac{1}{2}x(9 - x^2) = \frac{1}{2}x(3 - x)(3 + x) = 0\,.$$

Ein Kinderspiel also, denn die gesuchten Werte x sollen positiv sein. $f(1) > g(1)$, also:

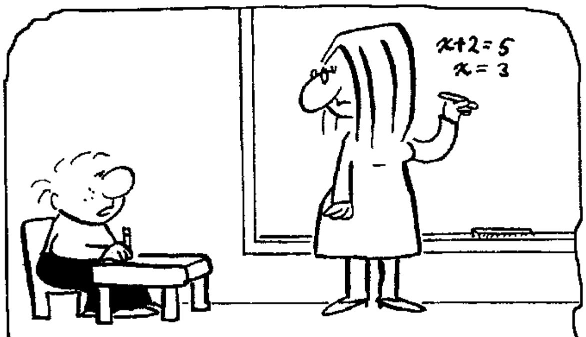
$$A = \int\limits_0^3 4.5x - \frac{1}{2}x^3\,dx = \left[\frac{9}{4}x^2 - \frac{1}{8}x^4\right]_0^3 = \frac{81}{8}$$

Funktionen II: Logarithmus und Exponentialfunktion

4

Wir behandeln:

- Bijektivität von Funktionen: Wir "kehren Funktionen um"
- Wir "verketten" Funktionen
- Was hat die Eulersche Zahl e eigentlich mit Wachstum zu tun?
- Ableitung und Integration von Exp– und Log–Funktionen



"Just a darn minute! Yesterday you said X equals two!"

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit Exponential– und Logarithmusfunktionen im weiteren und mit der natürlichen Exponentialfunktion – oder auch e–Funktion – und dem natürlichen Logarithmus – oder auch ln–Funktion – im engeren Sinne beschäftigen. Diese beiden Funktionen sind einander Umkehrfunktionen, das heißt das ein auf y abgebildetes x von der einen Funktion durch die jeweils andere gerade wieder auf x zurückabbildet. Wir benötigen weitere Begrifflichkeiten und Eigenschaften rund um den Funktionsbegriff generell, was wir im anschließenden Unterkapitel erledigen. Dazu gehört die Umkehrfunktion und die Voraussetzung, wann eine Funktion umkehrbar ist. Das zweite Unterkapitel behandelt diese Eigenschaften anhand dieses konkreten Funktionstypus. Im dritten und vierten Unterkapitel klären wir neue Differentiations– und Integrationsregeln, da die bisher besprochen nun nicht mehr ausreichen werden. Schlussendlich werden wir interessante Anwendungsbereiche kennenlernen. An die Arbeit:

4.1 Eigenschaften von Funktionen II: Verkettung und Umkehrung

Definition 65: Monotonie von Funktionen: Wir nennen eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf $[a, b]$ *monoton wachsend* *(monoton fallend)*, falls

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b]\; x_1 < x_2 \; : \; f(x_1) \leq (\geq) f(x_2)$$

gilt. f heißt *streng monoton wachsend* *(streng monoton fallend)*, falls

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b]\; x_1 < x_2 \; : \; f(x_1) < (>) f(x_2)\,.$$

gilt. Wir nennen f streng monoton, wenn f entweder streng monoton wachsend (smw) oder streng monoton fallend (smf) ist.

Definition 66: Injektiv, Surjektiv & Bijektiv: Es seien A, B Mengen. Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt

surjektiv	$:\Leftrightarrow$	$f(A) = B$	(f bildet A auf B ab)
injektiv	$:\Leftrightarrow$	$\forall x_1 \neq x_2 \; : \; f(x_1) \neq f(x_2)$	(f ist eineindeutig)
bijektiv	$:\Leftrightarrow$	f ist surjektiv und injektiv	(f bildet eineindeutig A auf B ab)

Sind $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to B$ streng monoton, so ist f injektiv, denn

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow (x_1 < x_2 \vee x_1 > x_2) \Rightarrow (f(x_1) < f(x_2) \vee f(x_1) > f(x_2)) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Beispiel 40

1. $f(x) = x + 3$ ist smw
2. $f(x) = x^2$ ist smw auf $\mathbb{R}_0^+$ und smf auf $\mathbb{R}_0^-$ und nicht monoton auf $\mathbb{R}$
   $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist nicht surjektiv $\wedge$ nicht injektiv
   $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ ist bijektiv

Satz 67: Umkehrfunktion: Ist $f : A \to B$ bijektiv, dann gilt

$$\forall x \in A\, \exists!\, y \in B \;:\; f(x) = y \quad \wedge \quad \forall y \in B\, \exists!\, x \in A \;:\; f(x) = y$$

$\Rightarrow$

$$\exists\, f^{-1} : B \to A \text{ mit } f^{-1}(y) = x \text{ wenn } f(x) = y$$

$f^{-1} : B \to A$ ist ebenfalls bijektiv und

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$$

Die Verkettung von f und f^{-1} bildet die Identität. Hier gilt dann auch

$$(f^{-1} \circ f)(x) = (f \circ f^{-1})(x) = Id(x) = x$$

Man berechnet die Umkehrfunktion, indem man $y = f(x)$ nach x auflöst und dann y durch x vertauscht.

Beispiel 41

Wir berechnen die Umkehrfunktion von: $f(x) = 2x$

$$y = 2x \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}y$$

Dann lautet die Umkehrfunktion

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x$$

Beispiel 42

Wir berechnen die Umkehrfunktion von: $f(x) = x^2 + 4\,x - 3$

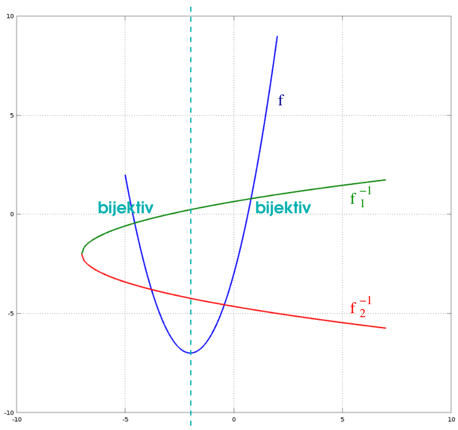
$$y = x^2 + 4\,x - 3 = (x+2)^2 - 7 \quad \Leftrightarrow \quad (x+2)^2 = y + 7 \quad \Leftrightarrow \quad |x+2| = \sqrt{y+7}$$

$\Rightarrow$

$$x = \begin{cases} \sqrt{y+7} - 2 & \text{für} \quad x \geq -2 \\ -\sqrt{y+7} - 2 & \text{für} \quad x < -2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$f_1^{-1}(x) = \sqrt{y+7} - 2$$
$$f_2^{-1}(x) = -\sqrt{y+7} - 2$$



Geometrische Interpretation:

Die Grafen von f und f^{-1} liegen spiegelbildlich zur Winkelhalbierenden $y = x$. (Siehe Abbildung 24)

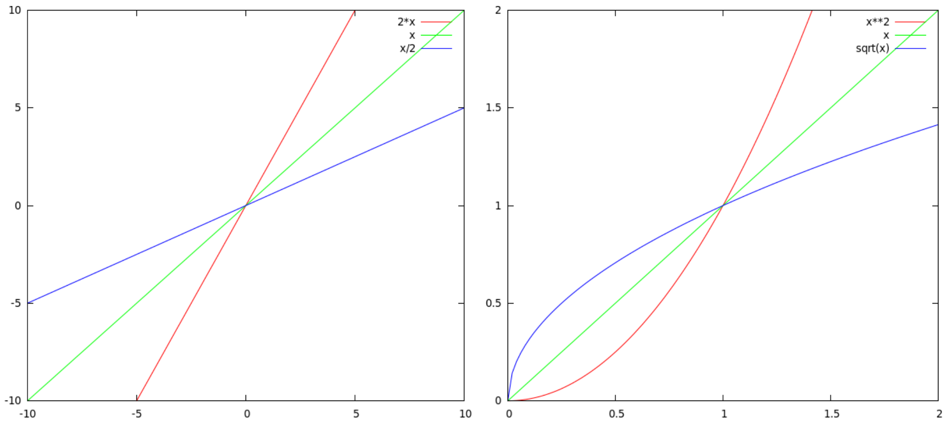
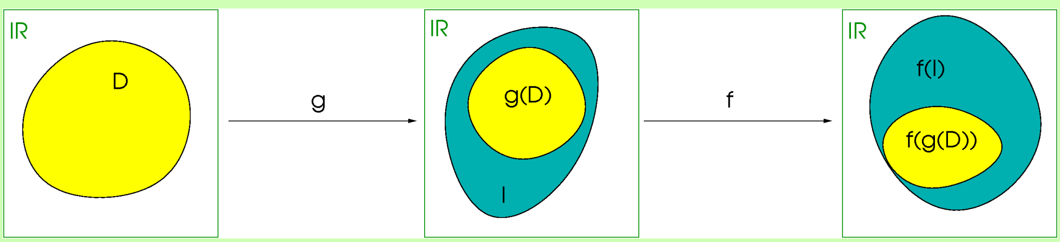


Abbildung 24: Grafen von Funktionen und deren Umkehrfunktionen

Definition 68: Komposition/Verkettung von Funktionen: Durch $f : I \to \mathbb{R}$ und $g : D \to \mathbb{R}$ mit $g(D) \subseteq I$ kann man die Komposition/Verkettung $f \circ g : D \to \mathbb{R}$ bilden. Sie ist definiert durch

$$(f \circ g)(x) := f(g(x))\,.$$



Beispiel 43

Es seien die Funktionen

$$f(x) = 2x + 3 \quad \text{und} \quad g(x) = 5x + 7$$

gegeben. Dann ist

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2g(x) + 3 = 2(5x + 7) + 3 = 10x + 17$$

und

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 5f(x) + 7 = 5(2x + 3) + 7 = 10x + 22\,.$$

Es gilt die Kommutativität für die $\circ$-Operation zwischen Funktionen f und deren Umkehrabbildung f^{-1} (siehe Beispiel 44):

$$(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x)$$

Für beliebige Funktionen g und f gilt dies nicht im Allgemeinen (siehe Beispiel 43) :

$$(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$$

Beispiel 44

Die Verkettung von f und f^{-1} aus Beispiel 41 führt dann auf

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = \frac{1}{2} f(x) = \frac{1}{2} 2x = x$$

oder auch

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = 2f^{-1}(x) = 2\frac{1}{2}x = x\,.$$

4.2 Exponential- und Logarithmusfunktion

Eine Exponentialfunktion ist eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form

$$f(x) = a^x$$

für $a \in \mathbb{R}$. greifen wir doch an dieser Stelle gleich die Eigenschaften aus dem vorangegangenen Unterkapitel auf und stellen die Frage nach Monotonie und Bijektivität.

Sinnvoller Weise sei $a > 0$. Den trivialen Fall $a = 0$ lassen wir außer Acht und $a < 0$ würde uns zu diversen unüberwindbaren Hindernissen führen. Warum? Das sehen wir gleich. Wenn also $a > 0$ ist so wird $f(x) > 0$ sein, ganz gleich wie es sich mit dem Vorzeichen von x verhält. In Abbildung 25 (links) sind ein paar Grafen für verschiedene a dargestellt. Die Grafen zeigen, dass die Exponentialfunktion wachsend oder auch fallend sein kann. Wann gilt was? Es sei $0 < x_1 < x_2$. Wann ist $f(x)$ streng monoton wachsend?

$$\begin{array}{lrl}
 & a^{x_1} < a^{x_2} & \quad |\ : a^{x_2} > 0 \\
\Leftrightarrow & \dfrac{a^{x_1}}{a^{x_2}} < 1 & \\
\Leftrightarrow & a^{x_1 - x_2} < 1 & \quad x_3 := x_2 - x_1 > 0 \\
\Leftrightarrow & a^{-x_3} < 1 & \\
\Leftrightarrow & \dfrac{1}{a^{x_3}} < 1 & \quad |\ \cdot a^{x_3} \\
\Leftrightarrow & 1 < a^{x_3} & \quad |\,\hat{}^{\frac{1}{x_3}} \\
\Leftrightarrow & 1 < a &
\end{array}$$

Die Funktion $f(x) = a^x$ für $a > 0$ ist also streng monoton wachsend wenn $a > 1$ ist. Genauso können wir zeigen, dass sie streng monoton fallend ist, wenn $a < 1$ ist. Zusammenfassend können wir sagen, wie auch immer $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ gewählt ist, so wird $f(x)$ eine streng monotone, also insbesondere injektive Abbildung sein. Durch eine passende Wahl von Definitions– und Bildbereich, nämlich $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ erreichen wir auch, dass f surjektiv ist und somit auch bijektiv.

Da eine Exponentialfunktion bijektiv ist, wissen wir, dass eine Umkehrung der Abbildung möglich ist. Wie aber können wir $y = a^x$ nach x auflösen? Das geht so direkt gar nicht. Was der mathematiker nicht hat das definiert er sich. Drum definieren wir die Umkehrabbildung

$$y = a^x \qquad \Leftrightarrow \qquad x =: \log_a y \,.$$

Wir halten fest:

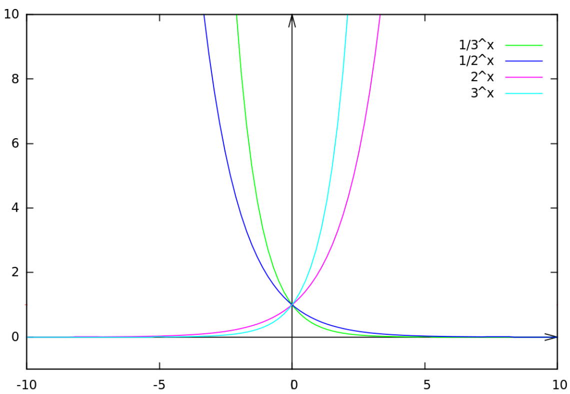
Definition 69: Exponential- und Logarithmusfunktion: Für $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ heißt die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto a^x$$

Exponentialfunktion mit der Basis a. Die Umkehrabbildung

$$f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto \log_a x$$

heißt *Logarithmus (-funktion)* zur Basis a.



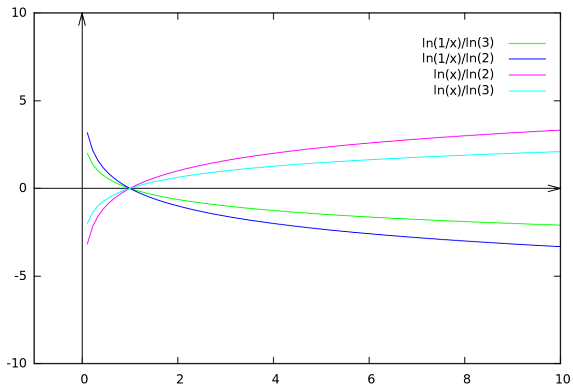


Abbildung 25: Grafenbeispiele für $f(x) = a^x$ (links) und $f^{-1}(x) = \log_a x$ (rechts)

Beispiel 45

$$8 = 2^x \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \log_2 8$$

“2 hoch was (=x) ist 8?”, richtig 3.

$$2 = \log_3 x \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 3^2$$

Formel 70: Rechenregeln für Exponential– und Logarithmusfunktionen: Es seien $a, b > 0$:
Exponentialfunktion:

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y \qquad a^{-x} = \tfrac{1}{a^x} \qquad a^0 = 1$$

$$p \cdot a^x + q \cdot a^x = (p+q) \cdot a^x \qquad \tfrac{a^x}{b^x} = \left(\tfrac{a}{b}\right)^x \qquad (a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

Logarithmusfunktion:

$$\log_a(b^n) = n \log_a(b) \quad \Rightarrow \quad \log_a \tfrac{1}{b} = -\log_a(b)$$

$$\log_a(bc) = \log_a(b) + \log_a(c) \quad \Rightarrow \quad \log_a \tfrac{b}{c} = \log_a(b) - \log_a(c)$$

Notation:

$$\log(b) := \log_{10}(b)$$

$$\ln(b) := \log_e(b)$$

Basiswechsel:

$$\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}$$

Herleitung:

Wir definieren zunächst

$$x := \log_a b\,,\ y := \log_a c \quad \text{und} \quad z := \log_a(b\,c)\,.$$

Es ist

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b \quad \text{und} \quad a^y = c \Leftrightarrow y = \log_a c \quad \text{und} \quad a^z = b\,c \Leftrightarrow z = \log_a(b\,c)\,.$$

Nun multiplizieren wir $a^x = b$ mit $a^y = c$ und erhalten

$$\begin{aligned} && a^x a^y &= b\,c \\ \Leftrightarrow && a^{x+y} &= b\,c \\ \Leftrightarrow && \log_a(b\,c) &= x + y \\ && &= \log_a b + \log_a c \end{aligned}$$

Alles Weitere ergibt sich direkt aus dieser Erkenntnis:

$$\log_a(b^n) = \log_a(b\,b^{n-1}) = \log_a b + \log_a(b^{n-1}) = \cdots = \underbrace{\log_a b + \cdots \log_a b}_{\text{n mal}} = n\ \log_a b$$

Und genauso:

$$\log_a \frac{1}{b} = \log_a(b^{-1}) = -\log_a b$$

Sowie:

$$\log_a \frac{c}{b} = \log_a \left(c \cdot \frac{1}{b}\right) = \log_a c + \log_a \frac{1}{b} = \log_a c - \log_a b$$

Beispiel 46

(a)

$$\log_a a = 1 \quad \text{denn} \quad a^1 = a\,.$$

(b)

$$\log_3 81 = \log_3(3^4) = 4\ \log_3 3 = 4$$

(c)

$$\log_2 \frac{8}{16} = \log_2 8 - \log_2 16 = 3 - 4 = -1$$

(d)

$$\log_2 \frac{1}{2} = -\log_2 2 = -1$$

Beispiel 47

$$a^{\log_a x} = x \quad \text{und} \quad \log_a a^x = x$$

Auf dem Taschenrechner stehen der dekadische Logarithmus ($\log$) und der natürliche Logarithmus zur Basis e ($\ln$) zur Verfügung. Häufig muÃ man aber Logarithmen zu anderen Basen als 10 oder e berechnen. Das ist zum Glück leicht möglich, wie wir gleich sehen werden.

Herleitung des Basiswechsels:

Mit $y = \log_b x$ können wir Folgendes machen:

$$b^{\log_b x} = b^y = x$$

Daraus folgt dann

$$\log_a \left(b^{\log_b x}\right) = \log_a x\,. \tag{12}$$

Andererseits gilt mit $\log_a b^n = n\ \log_a b$ auch

$$\log_a \left(b^{\log_b x}\right) = \log_b x \cdot \log_a b\,. \tag{13}$$

Die Beziehungen (12) und (13) zusammen ergeben dann

$$\log_a x = \log_b x \cdot \log_a b \quad \Leftrightarrow \quad \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}\,.$$

Genau hinsehen! Rechts stehen nur Logarithmen zur Basis b, links steht ein einzelner Logarithmus der Zahl x zur Basis b. Steht irgendein Logarithmus zur Verfügung, so kann mit diesem Zusammenhang jeder andere Logarithmus berechnet werden!

Beispiel 48 Wie löst man

$$(1.2)^x = 3.4$$

nach x auf, wenn der Taschenrechner den Logarithmus zur Basis 1.2 nicht hergibt? Wir wechseln einfach die Basis, so dass wir Logarithmendarstellungen haben, die wir dann auch berechnen können und erhalten tatarata:

$$\log_{1.2} 3.4 = \frac{\log 3.4}{\log 1.2} \approx 6.71218178...$$

Eine kleine Anmerkung zur Legende bei der rechten Grafik in Abbildung 25:

$$x = \log_{\frac{1}{3}} y \quad \text{ist die Umkehrung von} \quad \left(\frac{1}{3}\right)^x = y\,.$$

Diesen Ausdruck formen wir ein wenig um:

$$\left(\left(\frac{1}{3}\right)^x = y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{y} = 3^x\right) \quad \Rightarrow \quad \left(x = \log_3 \frac{1}{y} = \frac{\log \frac{1}{y}}{\log 3} = -\frac{\log y}{\log 3}\right)$$

4.3 Differentiation II

Wir wollen also eine beliebige Exponentialfunktion ableiten und machen einmal folgende Überlegung:

$$\begin{aligned}(a^x)' &= \lim_{h\to\infty} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} \\ &= a^x \underbrace{\lim_{h\to\infty} \frac{a^{0+h} - a^0}{h}}_{(a^x)'\big|_{x=0}}\end{aligned}$$

Für Exponentialfunktionen $f(x) = a^x$ gilt also

$$f'(x) = f(x)\, f'(0)\,.$$

Das ist etwas Besonderes und gilt nur für diese Sorte Funktionen.

Bei Exponentialfunktionen gilt: Die momentane änderungsrate ist proprtional zum Bestand.

$$f'(x) \propto f(x)$$

Lustig wäre es, wenn es ein a mit $(a^x)'\big|_{x=0} = 1$, also $f'(0) = 1$ gäbe, oder? Das würde bedeuten, dass die Änderungsrate genau gleich dem Bestand ist.

Heuristik: Für sehr kleine h würde dann gelten

$$\begin{aligned} \frac{a^h - 1}{h} &\approx 1 \\ \Leftrightarrow \qquad a &\approx \sqrt[h]{1+h} \end{aligned}$$

Setze $n := \frac{1}{h}$, dann gilt für sehr große n

$$\Rightarrow \qquad a \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Kommt Ihnen das bekannt vor? Genau! Möglicherweise gilt

$$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x \,.$$

Aus Kapitel 2.2 wissen wir, dass

$$\mathrm{e}^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

gilt. Damit wollen wir

$$\frac{d}{dx}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

untersuchen. Wir haben es hier it der Verkettung zweier Potenzfunktionen zu tun, nämlich

$$(f \circ g)(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \,, \text{ mit } f(x) = x^n \text{ und } g(x) = 1 + \frac{1}{n}\,x \,.$$

Die Ableitung von verketteten Funktionen erhalten wir ganz einfach über die Kettenregel:

Satz 71: Ableitung von verketteten Funktionen (Kettenregel): Die Funktionen $u : I \to \mathbb{R}$ und $f : u(I) \to \mathbb{R}$ seien differenzierbar. Dann ist $(f \circ u)$ in $x \in I$ differenzierbar und es gilt

$$(f \circ u)'(x) = (f' \circ u)(x)u'(x) \,.$$

Beispiel 49

Es seien die Funktionen

$$f(x) = x^2 \qquad g(x) = x^{\frac{1}{3}} \qquad h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x)^2 = x^{\frac{2}{3}}$$

gegeben. Dann ist

$$f'(x) = 2\,x \qquad g'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \qquad h'(x) = \frac{2}{3}\,x^{-\frac{1}{3}}$$

Mit der Kettenregel ist es nicht nötig (und manchmal auch nicht möglich) die Verkettung $f \circ g$ aufzudröseln, denn es gilt ganz einfach:

$$(f \circ g)'(x) = f(g(x))' = f'(g(x))\,g'(x) = 2\,g(x)\,\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = 2\,x^{\frac{1}{3}}\,\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\,x^{-\frac{1}{3}}$$

Toll, oder? Noch ein Beispiel, weil's so'n Spaßß macht.

Beispiel 50

$$\frac{d}{dx}\,(2\,x+3)^2 = \frac{d}{dx}(f \circ g)(x)$$

mit $f(x) = x^2$ und $g(x) = 2\,x + 3$. Mit der Kettenregel gilt nun

$$\frac{d}{dx}(f \circ g)(x) = f'(g(x))\,g'(x) = 2\,g(x)\,2 = 8\,x + 12\,.$$

Beispiel 51

$$\frac{d}{dx}\left(2\,x^2 - x^{\frac{1}{2}}\right)^{18} = 18\,\left(2\,x^2 - x^{\frac{1}{2}}\right)^{17}\,\left(4\,x - \frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

Beweis Kettenregel 71:

Die Kettenregel kann man ganz leicht einsehen; in einer Zeile quasi:

$$(f \circ g)'(x) = f(g(x))' = \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}$$

Wir multiplizieren die 1

$$\begin{aligned} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx} = f'(g(x))\,g'(x) \end{aligned}$$

□

Sie können am Beweis schon sehen, dass in der sogenannten Leibnizschen Symbolik die Kettenregel eine unwiderstehlich suggestive Form annimmt: Macht man aus $f(u)$ durch die Substitution $u = u(x)$ eine (mittelbare) Funktion von x so ist

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du}\,\frac{du}{dx}\,.$$

Das kann man dann auch gerne sukzessive fortführen mit $f(g(u(x)))$:

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{du}\frac{du}{dx}$$

Beispiel 52 Besucherstrom im Kino Wir betrachten den Vorraum eines grösen Kinos mit mehreren Kassen. Die Besucher strömen herein, kurz nach der Öffnung des Kinos. Ab einer bestimmten Anzahl Personen werden immer weitere Kassen zur Bedienung der Massen geöffnet. Die Kasseneröffnungen erfolgen gemäß der Vorschrift f. Ein aufmerksamer Beobachter stellt fest, dass die Anzahl anwesender Personen zur Zeit t durch die Funktion $g(t)$ beschrieben werden kann.

$g(t) = t^2$ beschreibt die Anzahl bereits angekommenen Besucher zur Zeit t. Besucherstrom:

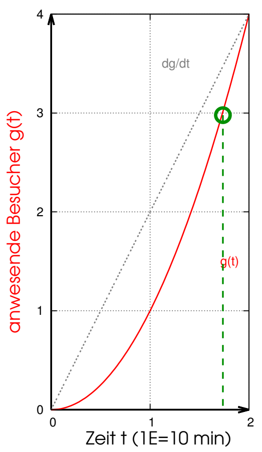
$f(g) = \sqrt{g+1}$ beschreibt die Anzahl geöffneter Kassen in Abhängigkeit der Besucherzahl. Eine Kasse ist immer auf, auch wenn keiner da ist.

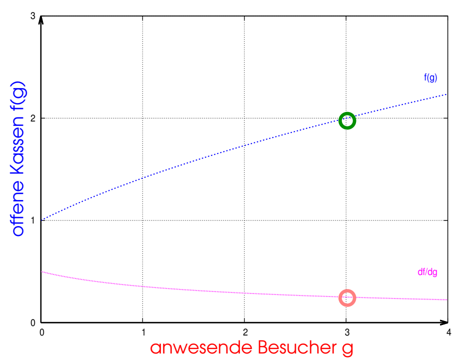
$f(g(t)) = \sqrt{t^2+1}$ beschreibt die Anzahl geöffneter Kassen zu bestimmten Zeiten t. Die Entwicklung dieser Kurve ist natürlich von der Entwicklung der Besucherzahl mitbestimmt.

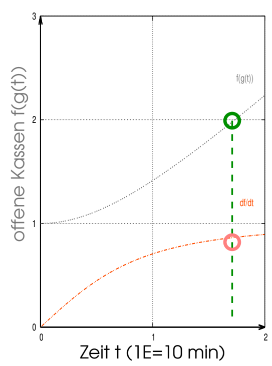
$\frac{dg}{dt}(t) = 2\,t$ beschreibt die Geschwindigkeit ankommender BEsucher (nicht wie schnell die laufen...)

$\frac{df}{dg}(g) = \frac{1}{2\sqrt{g+1}}$ beschreibt die Rate der Kassenöffnung pro Besuchervorkommen. Das ist völlig unabhängig davon wieviel Uhr es ist und in welcher Weise die Besucher tatsächlich eintreffen.

$\frac{df}{dt}(g(t)) = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$







Es sind nach etwa 17.3 Minuten 3 Personen anwesend.

Bei 3 Personen wird die 2-te Kasse geöffnet. Egal um welche Uhrzeit das ist.

Bei wenig Besuchern öffnen Kassen schnell mal, später immer weniger schnell. Bei viel Betrieb verlangt man mehr Akzeptanz bezüglich der Wartezeiten bei den Kunden.

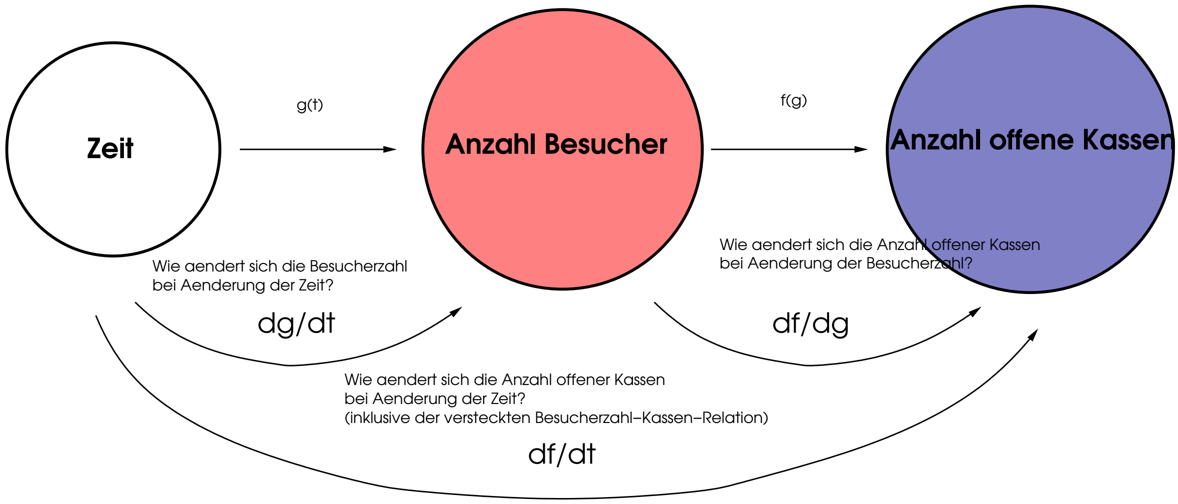
Bei 3 Personen etwa liegt die Änderungsrate der Kassenneuöffnung bei $\frac{1}{4} = 0.25$.

Nach 17.3 Minuten sind nach wie vor die 2 Kassen eöffnet.

Die Zunahme der Kassenöffnungen wird jetzt noch durch die Zunahme der Besucher angetrieben.

Die Änderungsrate der Kassenneuöffnung bezügliche der Zeit zu dem Zeitpunkt, wenn gerade 3 Personen anwesend sind, liegt bei 0.87.

In der eher abstrakten Darstellung sieht das Ganze dabb so aus:



So! Damit können wir nun die Ableitung der e-Funktion berechnen:

$$\begin{aligned}
(\mathrm{e}^x)' &= \frac{d}{dx} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{d}{dx} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty} n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} \frac{1}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)} = \frac{\mathrm{e}^x}{1} = \mathrm{e}^x
\end{aligned}$$

Die e–Funktion ist sozusagen ihre eigene Ableitung. Wie sieht's aus mit der Ableitung des natürlichen Logarithmus? Das kann man auf großen Wegen durch die Mathematik realisieren oder aber folgende nützliche Regel verwenden:

Satz 72: Ableitung der Umkehrfunktion:
Es sei f eine stetige, bijektive Abbildung mit $y = f(x)$. Dann gilt mit $x = f^{-1}(y)$

$$f^{-1'}(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Beweis Satz 72:

Die Ableitung der Umkehrfunktion läßt sich leicht einsehen, denn mit

$$\begin{aligned} y &= f(x) \\ f^{-1}(y) &= x \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \bar{y} &= f(\bar{x}) \\ f^{-1}(\bar{y}) &= \bar{x} \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} f^{-1'}(y) &= \lim_{\bar{y}\to y} \frac{f^{-1}(\bar{y}) - f^{-1}(y)}{\bar{y} - y} \\ &= \lim_{\bar{y}\to y} \frac{\bar{x} - x}{f(\bar{x}) - f(x)} \\ &= \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \,. \end{aligned}$$

$\square$

Damit können wir nun die Ableitung des natürlichen Logarithmus f mit $f(x) = \ln x$ berechnen:

$$f'(x) = \frac{1}{x}\,,$$

denn mit $f(x) = \ln x = y$ und $f^{-1}(y) = \mathrm{e}^y = x$ gilt:

$$\ln' x = \frac{1}{(\mathrm{e}^y)'} = \frac{1}{\mathrm{e}^y} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

$\square$

Nun sind wir auch in der Lage, die allgemeine Exponentialfunktion sowie auch die allgemeine Logarithmusfunktion zu differenzieren. Es seien

$$\begin{aligned} f(x) &= a^x \\ f^{-1}(x) &= \log_a x \;(= y) \end{aligned}$$

Wir starten mit dem Logarithmus und bedienen uns der Möglichkeit eines Basiswechsels, denn dann können wir den Ausdruck in Termen des natürlichen Logarithmus schreiben, von dem wir ja schon wissen, wie er zu differenzieren ist:

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{\ln' x}{\ln a} = \frac{1}{x \ln a}$$

So einfach ist das. Nun nutzen wir wiederum diese Kenntnis aus, um $f(x)$ abzuleiten und zwar mit Hilfe der Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion:

$$(a^x)' = \frac{1}{(\log_a y)'} = y \ln a = a^x \ln a$$

Und das war dann auch schon der ganze Zauber. Wir halten das zusammen fest:

Formel 73: Ableitung von Exponential- und Logarithmusfunktionen:

$$(a^x)' = a^x \; \ln a \quad \text{und} \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \; \ln a}$$

Insbesondere gilt dann für $a = \mathrm{e}$ mit $\ln \mathrm{e} = 1$:

$$(e^x)' = e^x \quad \text{und} \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Die Eigenschaft, dass die Ableitung einer Exponentialfunktion proportional zu sich selbst ist macht sie zu einer Lösung der ODE (ordinary differential equation = gewöhnliche Differentialgleichung)

$$f'(x) = \alpha\, f(x)\,. \tag{14}$$

Jede Funktion

$$f(x) = \mathrm{e}^{\alpha\, x}\, C$$

mit einer beliebigen Konstanten C ist eine Lösung von (14). C ist dabei so eine Art Integrationskonstante, die wir durch Hinzufügen einer Bedingung der Art $f(x_0) - f_0$, wobei x_0 und f_0 gegeben sind. Da es sich bei derlei Prozessen meist um zeitabhängige Bewegungen handelt und man den Zustand in der Regel zu Beginn der Zeitrechnung kennt, spricht man von einem *Anfangswertproblem*. Zusammen formuliert sich das so:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha\, f(x) \qquad\qquad \text{in } I = [0, x_{\max}] \\ f(0) &= f_0 \end{aligned}$$

Beispiel 53

Zu

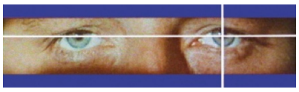
$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\,f(x) \qquad\qquad \text{in } I = [0, 1000] \\ f(0) &= 10 \end{aligned}$$

ist

$$f(x) = 10\,\mathrm{e}^{2\,x}$$

die Lösung.

Beispiel 54 Tatort



Ein Pathologe möchte den Todeszeitpunkt eines Mordopfers feststellen. Er misst die Temperatur des Opfers um 12.36 Uhr, sie beträgt 27°C. Nach dem Newtonschen Abkühlungsgesetz ist die Abkühlung eines Körpers proportional zur Differenz von Körpertemperatur und Außentemperatur. Leider kennt der Pathologe die Proportionalitätskonstante nicht. Deshalb misst er die Temperatur um 13.06 Uhr noch einmal und kommt auf 25°C. Die Außentemperatur beträgt 20°C, die Körpertemperatur zum Todes- zeitpunkt wird mit 37°C angesetzt. Wann fand der Mord statt?

Was wissen wir?

1. Newtonschen Abkühlungsgesetz:
   a = Außentemperatur, α = Proportionalitätskonstante.

$$\begin{aligned} f'(t) &= \alpha(f(t) - a) \\ f(t_0) &= f_0\,. \end{aligned}$$

2. t_0 sei der Todezeitpunkt.

Temperatur (°C)	$\cdots$	37	$\cdots$	27	25
Uhrzeit	0:00	?	$\cdots$	12:36	13:06
Zeit (min)	0	t_0	$\cdots$	756	786

$$\begin{aligned} && f'(t) &= \alpha(f(t) - a) \\ \Leftrightarrow && (\underbrace{f(t) - a}_{=:\tilde{f}(t)})' &= \alpha(f(t) - a) \\ \Leftrightarrow && \tilde{f}'(t) &= \alpha\tilde{f}(t) \\ \Rightarrow && \tilde{f}(t) &= C\mathrm{e}^{\alpha\,t} \\ \Rightarrow && f(t) &= C\mathrm{e}^{\alpha\,t} + a \end{aligned}$$

Die Konstante C wird über den Anfangswert $f(t_0) = f_0(= 37)$ bestimmt.

$$\begin{aligned} && f_0 = f(t_0) &= C\mathrm{e}^{\alpha\, t_0} + a \\ \Leftrightarrow && C &= (f_0 - a)\mathrm{e}^{-\alpha\, t_0} \\ \Rightarrow && f(t) &= (f_0 - a)\mathrm{e}^{\alpha\,(t-t_0)} + a \end{aligned}$$

Setzen wir unsere Daten ein so erhalten wir

$$\boxed{f(t) = 20 + 17\,\mathrm{e}^{\alpha\,(t-t_0)}}$$

Wir haben zwei Unbekannte α (Abkühlungsrate) und t_0 (Todeszeitpunkt) und zwei Bedingungen, nämlich $f(756) = 27$ und $f(786) = 25$. Damit erhalten wir zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} && 27 &= 20 + 17\,\mathrm{e}^{\alpha(756-t_0)} \\ \Leftrightarrow && \alpha &= \frac{\ln 7 - \ln 17}{756 - t_0} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} && 25 &= 20 + 17\,\mathrm{e}^{\alpha(736-t_0)} \\ \Leftrightarrow && \alpha &= \frac{\ln 5 - \ln 17}{786 - t_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow && \frac{\ln 5 - \ln 17}{786 - t_0} &= \frac{\ln 7 - \ln 17}{756 - t_0} \\ \Rightarrow && t_0 &= \frac{786 \ln 7 - 30 \ln 17 - 756 \ln 5}{(\ln 7 - \ln 5)} \\ && &\approx 676.89 \end{aligned}$$

Der Mord passierte demnach gegen 11:16.

$$\begin{aligned} \Rightarrow && \alpha &= \frac{\ln 5 - \ln 17}{786 - t_0} \\ && &\approx -0.0112 \end{aligned}$$

Insgesamt kann die Temperaturkurve ab t_0 näherungsweise durch folgende Funktion beschrieben werden:

$$f(t) \approx 17\,\mathrm{e}^{-0.0112\,t+7.59} + 20$$

Wie entwickelt sich die Temperatur im weiteren Verlauf?

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty} 17\,\mathrm{e}^{-0.0112\,t+7.59} + 20 = 20$$

Die Temperatur bleibt oberhlab von $20°$C, was gerade der Umgebungstemperatur entspricht.

4.4 Integration II: partielle Integration

In diesem Kapitel geht es nun um die Fragestellung nach Stammfunktionen zu Logarithmus– und Exponentialfunktionen, also um:

Wir starten mit e^x, weil das am einfachsten ist: Wir wissen, dass die Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion wieder sie selbst ist. Demzufolge ist sie selbst auch eine ihrer Stammfunktionen. Es ist also leicht einzusehen, dass

$$\int \mathrm{e}^x \, dx = \mathrm{e}^x + C$$

gilt.

Beispiel 55

$$\int \mathrm{e}^{\alpha\, x} \, dx = \frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{\alpha\, x} + C\,,$$

denn

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{\alpha\, x} + C\right) = \frac{1}{\alpha}\alpha\mathrm{e}^{\alpha\, x} = \mathrm{e}^{\alpha\, x}\,,$$

was genau dem Integranten entspricht.

Beispiel 56 Die Funktion e^{x^2} besitzt **keine** Stammfunktion.

Die Beispiele 55 und 56 zeigen, dass es keine generelle Regel zur Berechnung einer Stammfunktion zu Verknüpfungen der natürlichen Exponential– mit allgemeinen Funktionen gibt. Jede Situation muss für sich neu ausgeknobelt werden.

Betrachten wir die allgemeine Exponentialfunktion a^x: Wir wissen, dass die Ableitung durch $a^x \ln a$ gegeben ist. Suchen wir also eine Stammfunktion, so müssen wir den Faktor $\ln a$ korrigieren. Es ist demnach

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\,,$$

denn

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{a^x}{\ln a} + C\right) = \frac{a^x \ln a}{\ln a} = a^x \, .$$

Beispiel 57

$$\int a^{\beta\, x}\, dx = \frac{a^{\beta\, x}}{\beta \ln a} + C$$

$$\int \log x \; dx = ?$$

Die Berechnung des unbestimmten Integrals von einer Logarithmusfunktion geht nicht so "straight forward". Wir werden zunächst einen kleinen Trick (Nr. 1!) kennenlernen, der uns in vielen Situationen auf bestechend banale Art und Weise äußerst hilfreich sein wird:

Wir wissen von der Produktregel (50, S. 73), dass

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

gilt. Damit gilt dann auch

$$u'(x)v(x) = (u(x)v(x))' - u(x)v'(x)$$

und demzufolge

$$\int u'(x)v(x)\; dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\; dx \, .$$

Das bestimmte Integral berechnet sich analog, nur dass wir noch die Randbereiche berücksichtigen müssen:

$$\begin{aligned}
\int_a^b u'(x)v(x)\; dx &= \int_a^b (u(x)v(x))' \; dx - \int_a^b u(x)v'(x)\; dx \\
&= [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\; dx \\
&= (u(b)v(b) - u(a)v(a)) - \int_a^b u(x)v'(x)\; dx
\end{aligned}$$

Formel 74: Partielle Integration:
unbestimmte Integration:

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx$$

bestimmte Integration:

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int\limits_a^b u'(x)v(x)\,dx$$

Was bringt uns das? Sehr viel, denn wir können uns mit diesem kleinen Trick unliebsame Ausdrücke vom Hals schaffen. Zum Beispiel

Beispiel 58

$$\begin{aligned}
\int x\,\mathrm{e}^x\,dx &=: \int u(x)v'(x)\,dx && u(x) := x\,,\ v'(x) := \mathrm{e}^x \\
&\overset{\text{pI}}{=} u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx && v(x) = \mathrm{e}^x \\
&= x\,\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,dx \\
&= x\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(x-1)
\end{aligned}$$

Ganz ähnlich machen wir das mit dem natürlichen Logarithmus:

$$\begin{aligned}
\int \ln x\,dx &= \int \ln x \cdot 1\,dx \\
&=: \int u(x)v'(x)\,dx && u(x) := \ln x\,,\ v'(x) := 1 \\
&\overset{\text{pI}}{=} u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx && u'(x) = \frac{1}{x}\,,\ v(x) = x \\
&= x\,\ln x - \int \frac{1}{x}\,x\,dx \\
&= x\,\ln x - x = x(\ln x - 1) && \text{voilà}
\end{aligned}$$

Beispiel 59

$$\int \ln(\alpha\,x)\,dx = x(\ln(\alpha\,x) - 1) + C$$

Beispiel 60

$$\int x^2 \ln x \overset{\text{pI}}{=} \frac{1}{3}x^3 \ln x - \int \frac{1}{3}x^2 \, dx = \frac{1}{9}x^3(3\ln x - 1)$$

Beispiel 61

$$\int \ln^2 x \, dx = x \, \left((\ln x - 1)^2 + 1\right)$$

Damit sind wir quasi schon für allgemeine Logarithmusfunktionen durch, denn $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ kombiniert mit der Kenntnis über Stammfunktionen des natürlichen Logarithmus führt direkt auf

$$\int \log_a x \, dx = \frac{1}{\ln a} \int \ln x \, dx = \frac{x(\ln x - 1)}{\ln a} + C\,.$$

Bevor wir das Kapitel abschließen wollen wir uns noch Trick Nummero 2 der Integration einverleiben: Wir wissen, weil wir die Ableitung des Logarithmus und die Kettenregel kennen (!!!), dass

$$\frac{d}{dx} \ln g(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

gilt. Wir sollten also beim Anblick des Integrals unbedingt darauf achten, ob der Integrant von obiger Form (rechts vom Gleichheitszeichen) ist.

Beispiel 62

$$\int \frac{2}{2\,x+1} \, dx = \int \frac{g'(x)}{g(x)} \, dx = \ln g(x) + C = \ln(2\,x+1)$$

Beispiel 63

$$\int \frac{1}{x \ln x} \, dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} \, dx = \ln \ln x$$

Insgesamt haben wir jetzt folgende Aussagen gesammelt:

Formel 75:

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \log_a x \, dx = \frac{x\,(\ln x - 1)}{\ln a} + C$$

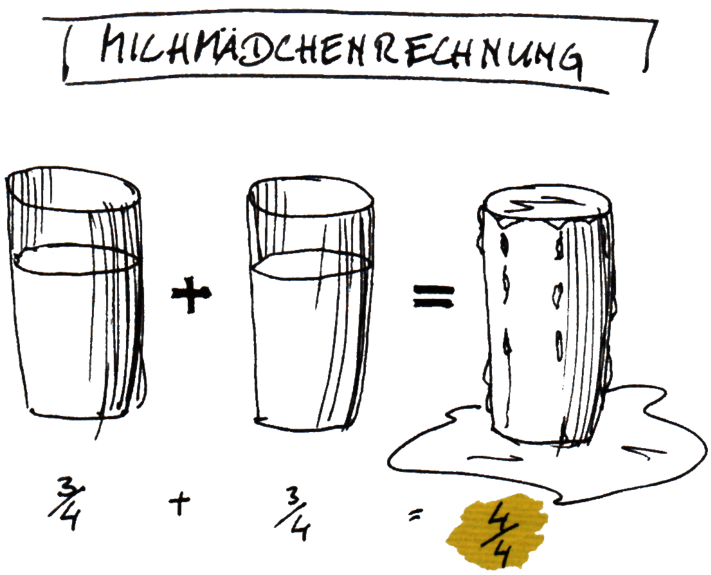
$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} \, dx = \ln g(x) + C$$

Funktionen III: rationale Funktionen

5

Wir behandeln:

- Brüche von Polynomen: rationale Funktionen
- Verhalten im Unendlichen: Asymptoten
- Integration von rationalen Funktionen: Partialbruchzerlegung



Wir untersuchen nun eine weitere Klasse von Funktionen, nämlich solche, die aus der Quotientenbildung von Polynomen entstehen, die sogenannten rationalen Funktionen. Wie bei allen anderen Funktionen wollen wir diese skizzieren. Die Bestimmung der meisten Charakteristika ist uns bereits bekannt. Wir werden zur Vervollständigung der Kurvendiskussion den Begriff Asymptote kennenlernen und in Sachen Polynomdivision unseren Horizont erweitern.

Die Ableitung von rationalen Funktionen ist uns wegen der Quotientenregel bereits bekannt. Dieses Unterkapitel entfällt demzufolge.

Bei der Integration wird es ein wenig interessanter. Wir werden sehen, wie wir mittels Partialbruchzerlegung jede beliebig komplizierte rationale Funktion in mehrere kleine, einfache

Brüche derart zerlegen können, so dass sich problemlos eine Stammfunktion berechnen lässt.

5.1 Eigenschaften von Funktionen III: Asymptoten

Definition 76: (gebrochen) rationale Funktionen:
Der Quotient zweier Polynome $p(x)$ und $q(x) \neq 0$

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

heißt *(gebrochen) rationale Funktion*. Ist der Grad des Nennerpolynoms größer als der des Zählerpolynoms, so heißt f *echt gebrochen* ansonsten *unecht gebrochen*. (Siehe Abb. 26)

Polynome werden auch *ganze rationale Funktionen* oder auch *ganzrationale Funktionen* genannt und rationale Funktionen nennt man auch *gebrochen rationale Funktionen*.

Beispiel 64

echt gebrochen rational

$$g(x) = \frac{5}{x-1}$$

unecht gebrochen rational

$$f(x) = 2\frac{x+1}{x}$$

unecht gebrochen rational

$$u(x) = \frac{(x+1)^2}{x+3}$$

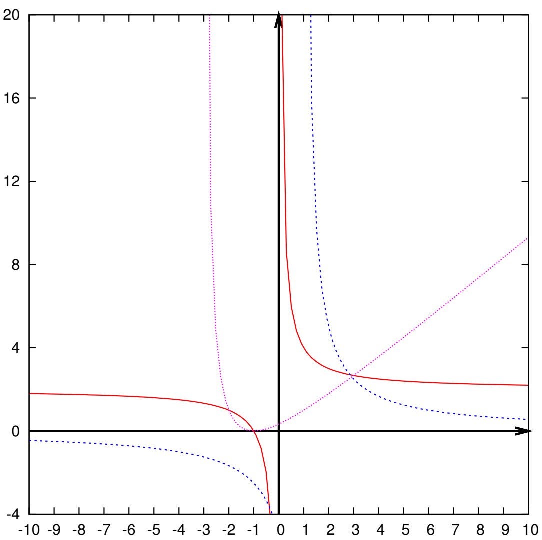


Abbildung 26: Echt und unecht gebrochen rationale Funktion

Der markante Unterschied zwischen den in Abbildung 26 dargestellten Funktionen besteht in ihrem unterschiedlichen Verhalten im $(\pm)$[8] Unendlichen; sowohl im negativen als auch im positiven Sinn. Eine echt gebrochen rationale Funktion strebt im Unendlichen nach Null. Eine unecht gebrochen rationale Funktion, deren Zählerpolynomgrad größer ist als der Nennerpolynomgrad strebt um Unendlichen nach plus oder minus Unendlich. Eine unecht gebrochen rationale Funktion deren Zähler- und Nennerpolynom von gleichem Grad ist strebt im Unendlichen gegen einen konstanten Wert ungleich Null. Überlegen Sie sich mal warum das so ist.

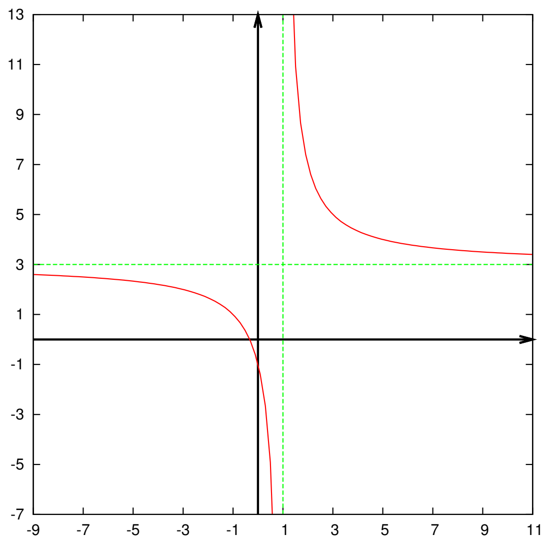
[8] Wenn vom Unendlichen gesprochen wird so ist immer $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ gemeint. Der Einfachheit halber gelte das ab jetzt und wird nicht mehr gesondert erwähnt.

Bei Polynomen haben wir Extrema und Wendepunkte zu Hilfe genommen, um den Grafen der Funktion zu skizzieren. Rationale Funktionen können recht kompliziert aussehen und keine Extrema besitzen, was eine Skizzierung deutlich erschwert. Hier nehmen wir sogenannten Asymptoten zu Hilfe:

Eine Asymptote $A_f(x)$ einer Funktion $f(x)$ ist eine Gerade, an die sich die Funktion im Unendlichen "anschmiegt". Eine Sorte Asymptote kennen wir bereits schon: die *horizontale Asymptote*. Das ist die Gerade $A_f(x) = \alpha$, wenn etwa $\lim_{x\to\infty} f(x) = \alpha$ gilt. Im Allgemeinen wird die Gerade $x = \beta$ als *vertikale Asymptote* bezeichnet, wenn β eine Polstelle von $f(x)$ ist, also etwa $\lim_{x\to\beta} f(x) = \pm\infty$ gilt. Wir werden den Begriff vertikale Asymptote zulassen, da es allgemein gebräuchlich ist, auch wenn er ein wenig fragwürdig ist, da diese Gerade keine Funktion darstellt.

Beispiel 65

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{3x+1}{x-1}\\
\lim_{x\to 1} f(x) &= \pm\infty\\
\lim_{x\to\pm\infty} f(x) &= 3
\end{aligned}
$$



Asymptoten helfen uns bei der Anfertigung einer Skizze. Sie sind als Geraden einfache Gebilde und geben vor, wie sich der Graf einer Funktion "weit draußen" verhält. Unter "weit draußen" ist sowohl bezüglich x (horizontale A.) als auch y (vertikale A.) gemeint. Zudem gibt es Asymptoten, die weder vertikal noch horizontal sind, die sogenannte *schiefe Asymptote*.

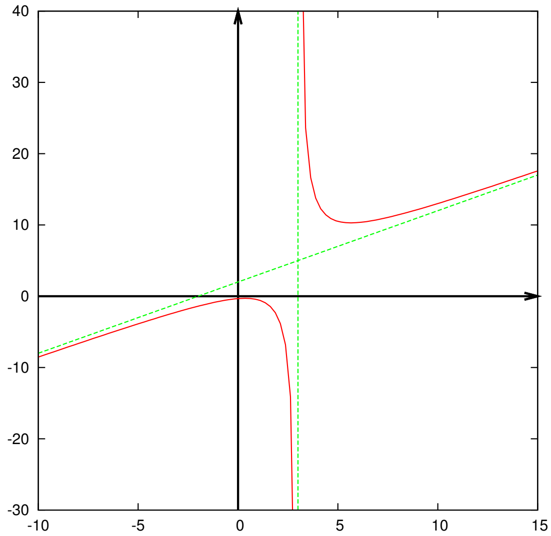
Wir erhalten sie, wenn wir bei einer unecht gebrochen rationalen Funktion, bei der der Polynomgrad des Zählerpolynoms um eins größer ist als der des Nennerpolynoms, eine Polynomdivision durchführen. Betrachten wir dazu ein Beispiel:

Beispiel 66

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 - x + 1}{x - 3} \\ &= x + 2 + \frac{7}{x-3} \\ &= {\color{green}A_f(x)} + \frac{7}{x-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\pm\infty} f(x) &= \lim_{x\to\pm\infty} A_f(x) \\ &+ \underbrace{\lim_{x\to\pm\infty} \frac{7}{x-3}}_{=0} \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \pm\infty$$



Definition 77: Es seien $p(x)$ und $q(x)$ Polynome mit $p(x) \in \mathbb{P}_k$ und $q(x) \in \mathbb{P}_l$. Eine rationale Funktion

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

läßt sich immer mittels Polynomdivision als Summe eines Polynoms und einer echt gebrochen rationalen Funktion

$$f(x) = g(x) + \frac{\bar{p}(x)}{\bar{q}(x)}$$

mit $\mathrm{Grad}(\bar{p}) < \mathrm{Grad}(\bar{q})$ schreiben, wobei

$g(x) = 0$	falls	$k < l$
$g(x) = c \neq 0$	falls	$k = l$
$\mathrm{Grad}(g) > 0$	falls	$k > l$, nämlich $\mathrm{Grad}(g) = k - l$.

$g(x) \in \mathbb{P}_0$ heißt *horizontale Asymptote*

$g(x) \in \mathbb{P}_1$ heißt *schiefe Asymptote*

$g(x) \in \mathbb{P}_{\geq 2}$ heißt *Näherungsfunktion*

Ist x_0 eine Polstelle von $f(x)$ so nennen wir die Gerade $x = x_0$ *vertikale Asymptote*

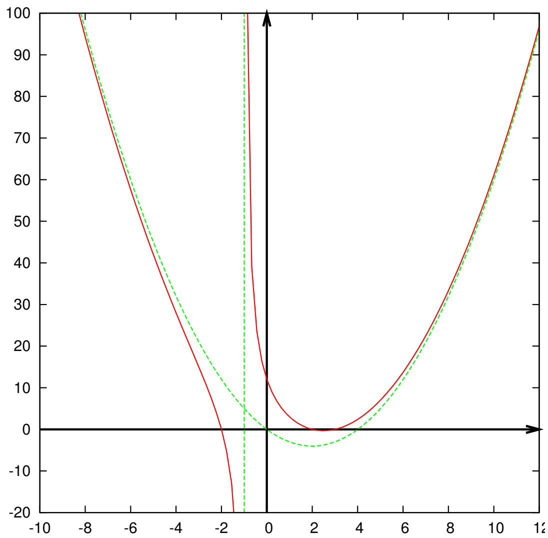
Beispiel 67

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x+1}$$
$$= x^2 - 4x + \frac{12}{x+1}$$

Im Unendlichen verhält sich die Funktion $f(x)$ wie die Näherungskurve $x^2 - 4x$, da

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{12}{x+1} = 0$$

ist.



Der Vollständigkeit wegen fassen wir an dieser Stelle noch einmal alle Merkmale einer Kurvendiskussion (inklusive der Asymptoten) zusammen:

Definition 78: **Kurvendiskussion:** Eine Kurvendiskussion beinhaltet die Untersuchung aller Funktionsmerkmale, sofern diese vorhanden sind, so dass die Funktion skizziert werden kann. Zu den zu untersuchenden Komponenten gehören:

1. Schnitte mit den Achsen
2. Asymptoten
3. lokale und globale Extrema
4. Bestimmung von Definitions- und Bildbereich
5. Wendepunkte

5.2 Integration III: Partialbruchzerlegung

Die Frage, die wir uns in diesem Kapitel stellen ist: Wie können wir Stammfunktionen von rationalen Funktionen berechnen? Da wir jede rationale Funktion darstellen können als Summe aus Polynom und echt gebrochen rationaler Funktion und wir Stammfunktionen von Polynomen bereits kennen, genügt es, wenn wir nur echt gebrochen rationale Funktionen betrachten.

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = \int g(x) + \frac{r(x)}{q(x)}\,dx = \underbrace{\int g(x)\,dx}_{\text{das können wir schon}} + \int \underbrace{\frac{r(x)}{q(x)}}_{\text{echt gebr. rational}}\,dx$$

Ab jetzt gelte in diesem Kapitel: $f(x)$ ist eine echt gebrochen rationale Funktion.

Einige echt gebrochen rationale Funktionen können wir bereits ohne weiteres Integrieren. Wir wissen, dass $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$ gilt. Damit sind dann die Stammfunktionen

$$\int \frac{a}{x}\,dx = a\,\ln x + C \qquad \int \frac{a}{x-1}\,dx = a\,\ln(x-1) + C$$

$$\int \frac{a}{b\,x+c}\,dx = \frac{a}{b}\ln(b\,x+c) + C \qquad \int \frac{a}{x}\,dx = a\,\ln x + C$$

leicht ersichtlich. Aber wie sieht es aus mit

$$\int \frac{2x+3}{(x-1)(x+1)}\,dx\,?$$

Um solche, etwas kompliziertere Ausdrücke von rationalen Funktionen behandeln zu können, werden wir uns der sogenannten *Partialbruchzerlegung* (PBZ) bedienen. Die Partialbruchzerlegung sorgt dafür, dass wir den Quotienten aus Polynomen in einer Summe aus Quotienten von Polynomen schreiben. Nun erhalten wir zwar mehrere rationale Ausdrücke, die allerdings kleiner und handlicher sind und deren Stammfunktionen wir kennen. Machen wir am besten erst mal ein Beispiel:

Beispiel 68 Koeffizientenvergleich

$$f(x) = \frac{2x+3}{(x-1)(x+1)}$$

$f(x)$ kann in folgende Darstellung umformuliert werden:

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}\,.$$

Wir müssen nun nur noch a und b bestimmen:

$$\begin{aligned}
& \frac{2x+3}{(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{2x+3}{(x-1)(x+1)} = \frac{a(x+1)+b(x-1)}{(x-1)(x+1)} \\
\Leftrightarrow\quad & 2x+3 = a(x+1)+b(x-1) \qquad \text{für } x \notin \{\pm 1\} \\
\Leftrightarrow\quad & 2x+3 = x(a+b)+(a-b) \\
\Leftrightarrow\quad & 2 = a+b \quad \wedge \quad 3 = a-b \\
\Leftrightarrow\quad & a = \frac{5}{2} \quad \wedge \quad b = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Damit gilt insgesamt

$$f(x) = \frac{2x+3}{(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} = \frac{5}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}$$

Die eben engewandte Methode, heißt *Koeffizientenvergleich*. Wir haben durch die Partialbruchzerlegung Ausdrücke für die Darstellung von $f(x)$ erhalten, die wir integrieren können, da wir die entsprechenden Stammfunktionen bereits kennen:

$$\int \frac{2x+3}{(x-1)(x+1)}\,dx = \frac{5}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx = \frac{5}{2}\ln(x-1) - \frac{1}{2}\ln(x+1)$$

Ganz einfach jetzt, nicht wahr? Eine berechtigte Frage ist die, ob sich wohl alle rationalen Funktionen in Partialbrüche mit konstantem Nenner zerlegen lassen. Das ist leider nicht der Fall. Allgemein gilt aber Folgendes:

Formel 79: Ansatz der Partialbrüche:
Jede echt gebrochen rationale Funktion läßt sich als Summe von Partialbrüchen schreiben. Das sind echt gebrochen rationale Funktionen der Form:

(1) $\frac{c_1}{x-x_0}\,,\ \frac{c_2}{(x-x_0)^2}\,,\ \ldots\,,\ \frac{c_k}{(x-x_0)^k}$

(2) $\frac{a_1x+b_1}{x^2+px+q}\,,\ \frac{a_2x+b_2}{(x^2+px+q)^2}\,,\ \ldots\,,\ \frac{a_kx+b_k}{(x^2+px+q)^k}$

wobei der quadratische Ausdruck (x^2+px+q) keine reellen Nullstellen besitzt.

Zu jeder Potenz $(x-x_0)^k$ eines Linearfaktors im Nenner der echt gebrochen rationalen Funktion sind die k Partialbrüche der Form (1) mit unbestimmten Koeffizienten anzusetzen.

Zu jeder Potenz $(x^2+px+q)^k$ eines quadratischen Faktors ohne reelle Nullstellen sind die k Partialbrüche der Form (2) mit unbestimmten Koeffizienten anzusetzen. Alle Partialbrüche sind zu addieren.

Wir stellen fest, dass die Partialbrüche nicht immer so klein und einfach sind, wie wir es im ersten Beispiel gesehen haben. Eine elegante Methode, die schnell und einfach zum Ziel führt, ist die sogenannte *Zuhaltemethode*. Wir berechnen das erste Beispiel noch mal mit dieser Methode, um den Unterschied zu sehen:

Beispiel 69 Zuhaltemethode

Viele Rechenschritte bei der Zuhaltemethode müssen gar nicht niedergeschrieben werden sondern passieren nur im Kopf. Zur Veranschaulichung schreiben wir sie auf und setzen sie farblich ab. Das heißt, dass alles, was folglich grün dargestellt ist gar nicht geschrieben werden muss, sondern nur im Kopf passiert:

$$
\begin{aligned}
&& \frac{2x+3}{(x-1)(x+1)} &= \frac{a}{(x-1)} + \frac{b}{(x+1)} && \mid \cdot (x-1) \qquad (15)\\
\Leftrightarrow && \frac{(2x+3)(x-1)}{(x-1)(x+1)} &= \frac{a(x-1)}{(x-1)} + \frac{b(x-1)}{(x+1)} \\
\Leftrightarrow && \frac{(2x+3)(x-1)}{(x-1)(x+1)} &= \frac{a(x-1)}{(x-1)} + \frac{b(x-1)}{(x+1)}
\end{aligned}
$$

Wir kürzen die Terme der Übersicht wegen nicht heraus. a und b sollen Konstanten sein für alle möglichen x; insbesondere auch für $x = 1$ (Nullstelle des Linearfaktors mit dem wir eben gerade multipliziert haben!), also wählen wir $x = 1$ und setzen das ein. Das führt auf

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow && \frac{(2\cdot 1+3)(x-1)}{(x-1)(1+1)} &= \underbrace{\frac{a(x-1)}{(x-1)}}_{=a} + \underbrace{\frac{b(1-1)}{(1+1)}}_{=0} \\
\Leftrightarrow && \frac{5}{2} &= a
\end{aligned}
$$

Prima! a hätten wir schon mal. Das Gleich machen wir für b und starten dazu wieder bei (15):

$$
\begin{aligned}
&& \frac{2x+3}{(x-1)(x+1)} &= \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x+1)} && \mid \cdot (x+1)\\
\Leftrightarrow && \frac{(2x+3)(x+1)}{(x-1)(x+1)} &= \frac{a(x+1)}{(x-1)} + \frac{b(x+1)}{(x+1)}
\end{aligned}
$$

Mit der gleichen Argumentation wie vorher setzten wir nun $x = -1$ und erhalten:

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow && \frac{(2\cdot(-1)+3)(x+1)}{(-1-1)(x+1)} &= \underbrace{\frac{a(-1+1)}{(-1-1)}}_{=0} + \underbrace{\frac{b(x+1)}{(x+1)}}_{=b} \\
\Leftrightarrow && -\frac{1}{2} &= b
\end{aligned}
$$

Insgesamt gilt:

$$
f(x) = \frac{2x+3}{(x-1)(x+1)} = \frac{5}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}
$$

All die Rechenschritte müssen wir gar nicht machen, wir können das Ergebnis durch das Zuhalten bestimmter Terme einfach ablesen. Mit der Zuhaltemethode lassen sich die Koeffizienten leicht und schnell berechnen, aber sie ist nicht immer einsetzbar. Der Koeffizientenvergleich funktioniert immer, ist aber dafür rechenaufwändiger. Wir fassen die gesamte Vorgehenseise der Partialbruchzerlegung zusammen:

Regel 80: Vorgehensweise: Für eine gebrochen rationale Funktion $f(x)$ gelte folgende Notation:

$f(x)$ echt gebrochen rational:	$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$
$f(x)$ unecht gebrochen rational:	$f(x) = g(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$

1. Falls $f(x)$ unecht gebrochen rational ist, so erzeugen wir per Polynomdivision einen echt gebrochen rationalen Anteil.
2. Wir suchen (reelle) Nullstellen von $q(x)$ und stellen $q(x)$ in linearen und falls nötig quadratischen Faktoren dar.
$$q(x) = (x + x_1) \cdots (x + x_k)^k \cdot (a_1x^2 + b_1x + c_1) \cdots (a_kx^2 + b_kx + c_k)^k$$
3. Wir machen den Ansatz der Partialbruchzerlegung .
4. Solange wie möglich berechnen wir die gesuchten Koeffizienten mit der Zuhaltemethode, andernfalls mit dem Koeffizientenvergleich.

Zum Abschluß betrachten wir ein Beispiel, das einen quadratischen Term enthält.

Beispiel 70

Wir wollen
$$\frac{3x-1}{(x^2+1)(x+1)^2}$$
in Partialbrüche zerlegen: Ansatz
$$\frac{3x-1}{(x^2+1)(x+1)^2} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c_1}{x+1} + \frac{c_2}{(x+1)^2}$$
c_2 können wir mit der Zuhaltemethode bestimmten. Wir multiplizieren die Gleichung mit $(x+1)^2$, setzen $x = -1$ und erhalten
$$c_2 = -2\,.$$
Diesen Wert setzen wir für c_2 ein, subtrahieren den entsprechenden Partialbruch und bringen die linke Seite auf einen Nenner. Der Zähler läßt sich durch $(x + 1)$ teilen, so dass wir uns nun in folgender Situation befinden:
$$\frac{2x+1}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c_1}{x+1}$$
Im nächsten Schritt können wir c_1 mit der Zuhaltemethode berechnen, das heißt
$$c_1 = -\frac{1}{2}\,.$$

Den entsprechenden Partialbruch bringen wir wiederum auf die linke Seite, machen diese gleichnamig und stehen dann vor dieser Aufgabe:

$$\frac{\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{3}{2}}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{ax+b}{x^2+1}$$

Der Zähler auf der linken Seite der Gleichung sollte durch $(x+1)$ ohne Rest teilbar sein, andernfalls haben wir uns verrechnet. Eine kleine Polynomdivision liefert

$$\left(\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{3}{2}\right) : (x+1) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\,.$$

Das setzen wir ein und erhalten

$$\frac{\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}}{x^2+1} = \frac{ax+b}{x^2+1}$$

woraus wir $a = \frac{1}{2}$ und $b = \frac{3}{2}$ direkt ablesen können. Insgesamt können wir folgende Partialbruchzerlegung aufstellen:

$$\frac{3x-1}{(x^2+1)(x+1)^2} = \frac{1}{2}\frac{x+3}{x^2+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2}$$

Wenn wir die folgenden drei Stammfunktionen kennen, so sind wir, mit Hilfe der Partialbruchzerlegung , in der Lage, die Stammfunktion einer beliebigen rationalen Funktion zu berechnen:

$$\int \frac{1}{(x+x_0)^k}\,dx\,, \tag{16}$$

$$\int \frac{1}{(x^2+px+q)^k}\,dx \tag{17}$$

und

$$\int \frac{x}{(x^2+px+q)^k}\,dx\,, \quad k \geq 1 \tag{18}$$

Das erste Integral (16) kennen wir aus der Vorlesung:

$$\int \frac{1}{(x+x_0)^k}\,dx = \begin{cases} \ln(x+x_0) & \text{für } k=1 \\ \frac{1}{1-k}(x+x_0)^{-k+1} & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Stammfunktionen für das zweite und dritte Integral (17) und (18) entnehmen wir der Formelsammlung von Bronstein (2008[7]):

Formel 81: Stammfunktionen beliebiger Partialbrüche: Wir definieren $X := x^2 + px + q$ und $\Delta := 4q - p^2$. Damit gilt für das zweite Integral

$$k = 1 \qquad \int \frac{1}{X}\, dx = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\Delta}} \arctan \frac{2x+p}{\sqrt{\Delta}} & \text{für } \Delta \geq 0 \\ \frac{-2}{\sqrt{-\Delta}} \operatorname{arctanh} \frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}} & \text{sonst} \end{cases},$$

$$k > 1 \quad \int \frac{1}{X^k}\, dx = \frac{2x+p}{(k-1)\Delta X^{k-1}} + \frac{(2k-3)2}{(k-1)\Delta} \int \frac{1}{X^{k-1}}\, dx\,.$$

und für das dritte Integral

$$k = 1 \qquad \int \frac{x}{X}\, dx = \frac{1}{2} \ln X - \frac{p}{2} \int \frac{1}{X}\, dx$$

$$k > 1 \quad \int \frac{x}{X^k}\, dx = -\frac{px + 2q}{(k-1)\Delta X^{k-1}} - \frac{p(2k-3)}{(k-1)\Delta} \int \frac{1}{X^{k-1}}\, dx\,.$$

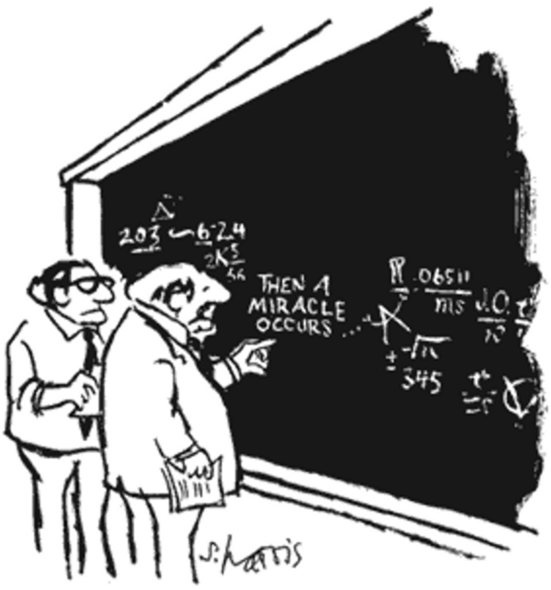
Die Integralformen (17) und (18) sind Ihnen neu. Wir haben sie in der Vorlesung nicht behandelt und sind demzufolge auch nicht prüfungsrelevant. Verstehen Sie sie lediglich als Vervollständigung des Kapitels und als Mittel Ihnen glaubhaft zu machen, dass es für eine beliebige rationale Funktion, ob echt oder unecht gebrochen rational, möglich ist eine Stammfunktion zu berechnen.

Funktionen IV: Trigonometrische Funktionen

6

Wir behandeln:

- Trigonometrische Funktionen & Schwingung
- Umkehrabbildung der Trigonometrischen Funktionen
- Herleitung der Ableitungsfunktionen, Ableitung der Umkehrabbildung
- Herleitung der Stammfunktionen
- Wir sprechen über Transformationen



"I THINK YOU SHOULD BE MORE EXPLICIT HERE IN STEP TWO."

6.1 Definition und Eigenschaften der Sinusfunktionen

Die Trigonometrischen Funktionen sind periodisch und somit besonders geeignet, periodische oder sich wiederholend ablaufende Prozesse zu beschreiben. Der Begriff Trigonometrie steht für die Beziehung zwischen den Winkeln und den Seitenlängen eines Dreiecks.

tri (drei) gon (ecke) meter (messen)[9]

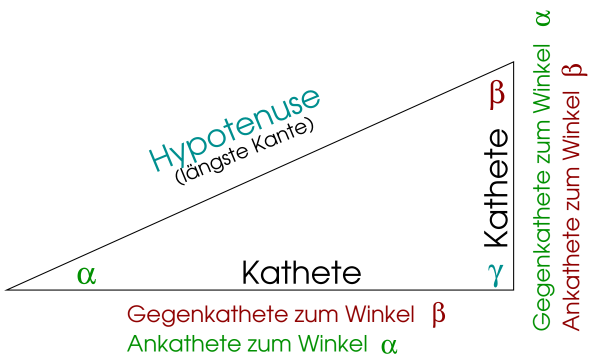
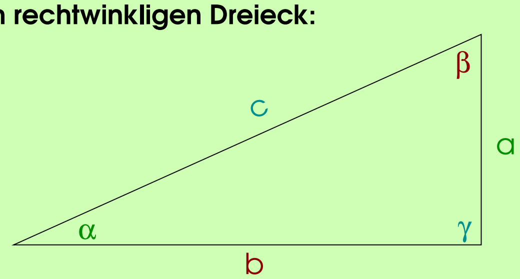


Abbildung 27: Hypotenuse und Katheten am rechtwinkligen Dreieck ($\gamma = 90°$)

Definition 82: Trigonometrsiche Funktionen am rechtwinkligen Dreieck:

Zu einem rechtwinkligen Dreieck mit den Kathetenlängen a und b und der Hypothenusenlänge c, bezeichnen wir den Winkel gegenüber der Kante a mit α und definieren folgende Funktionen:



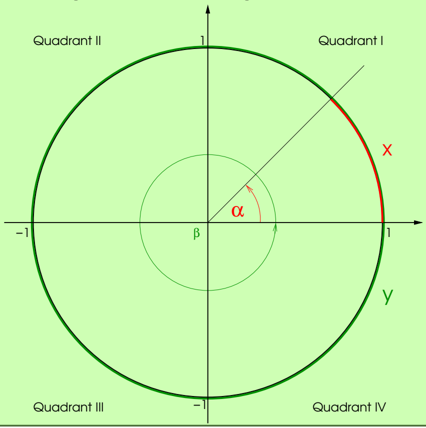
$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{b}{c}$$

Bei der Wahl des Argumentes der Sinusfunktion haben wir die Freiheit, zwischen dem Winkel in Grad mit der Kennzeichnung ° oder dem sogenannten Bogenmaß zu wählen. Das Bogenmaß beschreibt die Länge eines Kreisbogens am Einheitskreis, wobei Einheitskreis den Kreis mit Radius 1 meint.

[9] www.canoonet.de

Definition 83: Winkel und Bogenmaß: Das Bogenmaß x eines Winkels α ist die Länge des Kreisbogens, der dem Winkel α gegenüber liegt, wenn man ihn im Einheitskreis gegen den Uhrzeigersinn abträgt.



Umfang des Einheitskreises:

Winkel $\beta = 360°$

Bogenmaß $y = 2\,\pi$

Kreisabschnitt:

Winkel α

Bogenmaß $x = \frac{2\,\pi}{360°}\alpha$

Beispiel 71 Sinus als Funktion von Winkel oder Bogenmaß

Ist $\alpha = 45°$ so erhalten wir für das zugehörige Bogenmaß den Wert $x = \frac{\pi}{4}$ und es ist

$$\sin_{\deg} 45° = \sin_{\mathrm{rad}} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$$

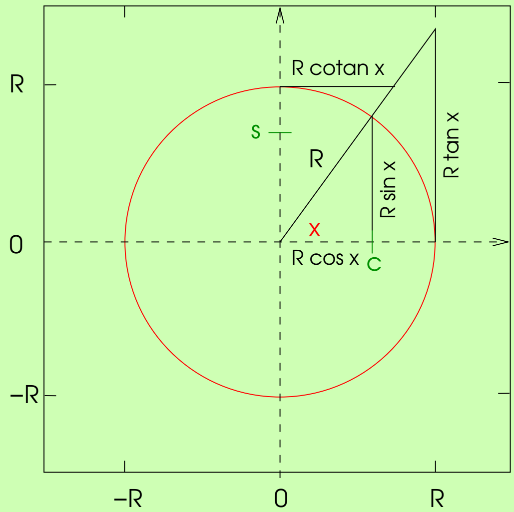
Die Indexbezeichnungen $\deg$ und rad gibt an, um welche Sorte es sich bei dem entsprechenden Argument der Funktion handelt. Es ist nicht üblich diese Bezeichnung anzubringen. Die Größe des Arguments ergibt sich aus dem Kontext. Wir werden ab jetzt nur noch im Bogenmaß rechnen!

Notation: Es sei $R \in \mathbb{R}$, $m := (m_1, m_2) \in \mathbb{R}^2$ und $|m| := \|m\|_2 := (m_1^2 + m_2^2)^{\frac{1}{2}}$. Dann bezeichnen wir mit

$$B_R(m) := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq R\}$$ die Kreisfläche mit Radius R und Mittelpunkt m

$$\partial B_R(m) := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = R\}$$ den Kreis mit Radius R und Mittelpunkt m

Definition 84: Trigonometrsiche Funktionen am Kreis mit Radius R:



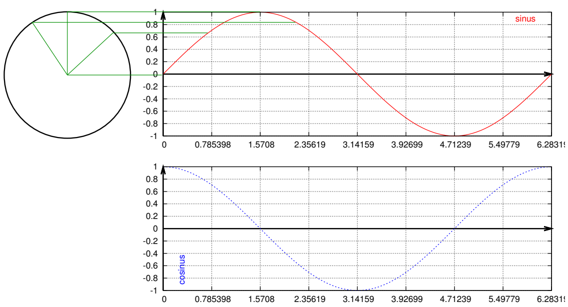
Es sei $(c,s) \in \mathbb{R}$ ein beliebiger Punkt auf dem Kreis $\partial B_R(0) \subset \mathbb{R}^2$ und x das zugehörige Bogenmaß. Dann gilt:

$$R\,\sin x = s$$
$$R\,\cos x = c$$
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{s}{c}\,, \qquad c \neq 0$$
$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{c}{s}\,, \quad s \neq 0$$

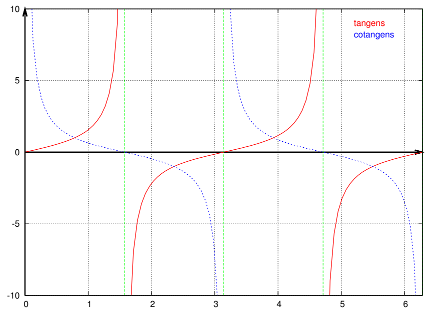
Im Folgenden soll es sich immer dann um einen Einheitskreis handeln, wenn nichts weiter dazu erwähnt wird.

Wir laufen immer entlang des Kreises gegen den Uhrzeigersinn und starten auf der positiven x–Achse. Das bedeutet, dass sich der Winkel oder das Bogenmaß immer (!!!) auf die positive x–Achse bezieht.

Wir starten also bei $(1,0)$ und bewegen uns entlang des Einheitskreises. Dabei tragen wir den Sinus und den Kosinus gegenüber des Winkels auf und erhalten dann den Grafen links, Tangens und Kotangens rechts in Abbildung 28.



Sinus und Kosinus



Tangens und Kotangens

Abbildung 28: Die Trigonometrischen Funktionen als Grafen

Bei der Abbildung des Grafen in Abbildung 28 sind wir einmal über den Einheitskreis "gelaufen" und wieder am Startpunkt angelangt. Wenn wir diesen Vorgang wiederholen erhalten wir die den gleichen Grafen für $x \in [2\,\pi, 4\,\pi]$. Das können wir beliebig fortsetzen. Wir erhalten immer wieder den gleichen Grafen, den wir an den vorherigen ansetzen. Das macht die Sinusfunktion zu einer periodischen Funktion.

Definition 85: Periodische Funktionen: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *periodisch mit Periode* p, falls

$$f(x) = f(x+p) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

gilt.

Satz 86: Eigenschaften der Sinusfunktionen:
Der Sinus ist eine ungerade und der Kosinus eine gerade Funktion, das heißt es gilt

$$\sin(-x) = -\sin x \qquad \text{und} \qquad \cos(-x) = \cos x\,.$$

Die Sinusfunktionen sind periodisch und haben die Periode $2\,\pi$:

$$\sin(x) = \sin(x + 2\,\pi) \qquad \text{und} \qquad \cos(x) = \cos(x + 2\,\pi)$$

1. $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$
2. $\sin(k\,\pi) = 0$
3. $\sin((2k + \frac{1}{2})\pi) = 1$
4. $\sin((2k + \frac{3}{2})\pi) = -1$
5. $|\sin x| \leq |x|$
6. $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$
7. $\cos(2k\,\pi) = 1$
8. $\cos((2k+1)\pi) = -1$
9. $\cos((k + \frac{1}{2})\pi) = 0$

Satz 87: Beziehungen zwischen Sinus und Kosinus:

1. $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$
2. $\sin(2\pi - x) = \sin(-x) = -\sin x.$
3. $\sin(\pi - x) = \sin x.$
4. $\sin(\pi + x) = -\sin x.$
5. $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = -\cos(\frac{\pi}{2} + x) = \sin x$
6. $\cos(2\pi - x) = \cos(-x) = \cos x.$
7. $\cos(\pi - x) = \cos(\pi + x) = -\cos x.$
8. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$

Beispiel 72 Wie können wir am Dreieck die Werte $\sin x$ und $\cos x$ für $x \in \left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right\}$ berechnen?

Satz 88: Einige Sinus– und Kosinuswerte:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\cos x$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

Satz 89: Rechenregeln für Sinus und Kosinus: Es seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt

1. $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
2. $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$
3. $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
4. $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$
5. $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$.
6. $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$.
7. $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$.
8. $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$.

1\. und 3. sind die sogenannten *Additionstheoreme*.

Beweis Satz 89:

1.

$$\begin{aligned}
\sin x \cos y + \cos x \sin y &= \begin{pmatrix}\sin x\\ \cos x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos y\\ \sin y\end{pmatrix}\\
&= < P', Q > \qquad \text{mit} \qquad P' := \begin{pmatrix}\sin x\\ \cos x\end{pmatrix},\ Q := \begin{pmatrix}\cos y\\ \sin y\end{pmatrix}\\
&= \underbrace{\|P'\|}_{=1}\,\underbrace{\|Q\|}_{=1}\,\cos\psi \qquad \text{mit} \qquad \psi = \angle(P', Q)\\
&= \cos\psi
\end{aligned}$$

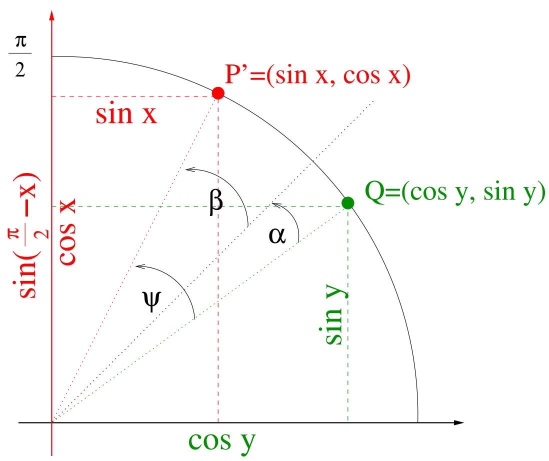
Wir wissen, dass

$$\beta + x = \frac{\pi}{4}$$
$$\alpha + y = \frac{\pi}{4}$$

gilt. Daraus folgt dann

$$\psi = \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} - (x+y)\,.$$

Mit



$$\cos\psi = \cos(\alpha+\beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (x+y)\right) = \sin(x+y)$$

folgt dann die Behauptung!

2. *Wir setzen in die erste Gelichung statt y einfach $-y$ und erhalten mit*

$$sin(x+(-y)) = \sin x \cos(-y) + \cos x \sin(-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

die Behauptung.

3. *Wir verschieben, so dass wir den Kosinus in Sinus ausdrücken können, verwenden dann 1. und schieben dann das ganze wieder zurück:*

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \sin\left(\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+(-y)\right) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos y - \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin y \\ &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \end{aligned}$$

4. *Hier verwenden wir den gleichen Trick wie bei 1.: Wir setzen $-y$ statt y in die Gleichung 3. Dann gilt*

$$\cos(x+(-y)) = \cos x \cos y + \sin x \sin y\,.$$

5. *Addiere Gleichung 1. und 2. mit $x = a$ und $y = b$. Wähle dann $a = \frac{x+y}{2}$ und $b = \frac{x-y}{2}$:*

$$\begin{aligned} && \sin(a+b)+\sin(a-b) &= \sin a\cos b + \cos a \sin b \\ && &\quad + \sin a \cos b - \cos a \sin b \\ \Leftrightarrow && \sin(a+b)+\sin(a-b) &= 2\,\sin a \cos b \\ \Rightarrow && \sin\left(\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}\right)+\sin\left(\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}\right) &= 2\,\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \\ \Rightarrow && \sin x + \sin y &= 2\,\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \end{aligned}$$

□

Zu 6. bis 8.: Übungsaufgabe!

<Für_den_geneigten_Leser>

(bis Beispiel 76)

Sinus und Kosinus sind in ganz $\mathbb{R}$ stetig! Stetigkeit haben wir bisher immer nur an einem speziellen Punkt x_0 geprüft, indem wir jeweils den links– und rechtsseitigen Grenzwert an der entsprechenden Stelle betrachtet haben. Was aber, wenn wir die Stetigkeit auf einem ganzne Intervall untersuchen wollen? Wir könnnen ja unmöglich die Stetigkeit an unendlich vielen Punkten prüfen. Ein äquivalentes Kriterium zu unserem bereits bekannten ist das sogenannte *ϵ–δ–Kriterium*:

Definition 90: ϵ-δ-Definition der Stetigkeit:
Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt in $x_0 \in I$ stetig $:\Leftrightarrow$

$$\forall \epsilon > 0\, \exists\, \delta = \delta(\epsilon) > 0\, \forall x \in I \; : \; |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Anmerkung: $\delta(\epsilon)$ bedeutet, dass δ von ϵ abhängen darf.

In Worten ausgedrückt heißt das, dass f genau dann in x_0 stetig ist, wenn gilt: Der Funktionswert $f(x)$ weicht beliebig wenig von $f(x_0)$ ab, falls nur x hinreichend nahe bei x_0 liegt und passt somit sehr gut zu unserer bisher bekannten Definition über die Grenzwertbildung. Am besten wir betrachten direkt mal ein Beispiel:

Beispiel 73 Eine stetige Funktion

Sei
$$f : [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2$$

Für beliebige $x, y \in [0,1]$ gilt

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |x^2 - y^2| \\ &= |(x-y)(x+y)| \\ &= |x-y||x+y| \\ &\leq 2|x-y| \\ &< 2\delta \end{aligned}$$

wir wählen nun $\delta = \frac{1}{2}\epsilon$

$$= \epsilon$$

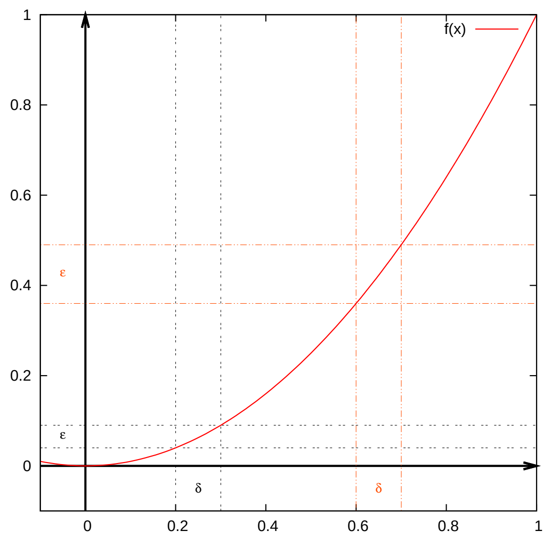


Abbildung 29: ϵ-δ-Verhalten bei einer stetigen Funktion

Das bedeutet, wenn x und y eng zusammenrücken so tuen das auch $f(x)$ und $f(y)$. An jedem Punkt im Intervall fallen damit auch links– und rechtsseitiger Grenzwert zusammen. Da wir den Beweis für beliebige Punkte $x, y \in [0,1]$ durchgeführt haben gitl die Stetigkeit im ganzen Intervall. Betrachten wir einen nichtstetigen Fall:

Beispiel 74 Eine nicht–stetige Funktion Sei $f : (0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$. Für $x, y \in (0,1]$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{y-x}{xy}\right|$$
$$= \frac{1}{|xy|}|x-y| < \frac{1}{|xy|}\delta$$

Für $x, y >> 0$ können wir $\delta := |xy|\epsilon$ definieren genau wie im Beispiel 73. Je näher wir aber mit den Werten x, y an die Null heranrücken, desto größer wird das ϵ auseinander gezogen. Siehe dazu die Abbildung 30. Der Abstand $|f(x) - f(y)|$ ist damit nahe bei Null nicht mehr kontrollierbar und in Folge dessen ist $f(x)$ dort auch nicht stetig.

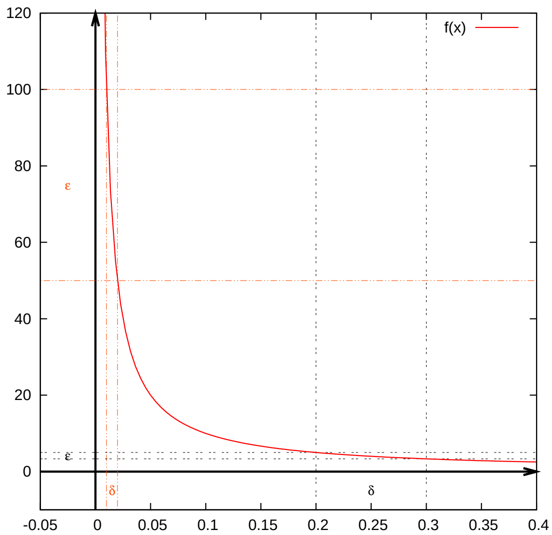


Abbildung 30: ϵ-δ-Verhalten bei einer nicht stetigen Funktion

Auf jedem abgeschlossenen Teilintervall $[a, 1]$ mit $a > 0$ gilt die Stetigkeit schon. Denn dann gilt:

$$|f(x) - f(y)| < \frac{1}{|xy|}\delta \leq \frac{\delta}{a^2 + \delta\, a} = \epsilon \qquad \text{für} \qquad \delta(\epsilon) = \frac{\epsilon\, a^2}{1 - a\,\epsilon}\,,\ \epsilon \neq \frac{1}{a}$$

Beispiel 75 Stetigkeit des Kosinus

Die Stetigkeit der Sinusfunktionen zu zeigen ist mit den oben genannten Beziehungen zwischen Sinus und Kosinus denkbar einfach. Wenn man es mal gesehen hat. Es seien $x > y > 0$. Dann gilt

$$|\cos x - \cos y| \overset{\text{Satz}}{\underset{89.8}{=}} \left|2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\right| = 2\underbrace{\left|\sin\frac{x+y}{2}\right|}_{\sin x \leq 1}\left|\sin\frac{x-y}{2}\right|$$
$$\leq 2\underbrace{\left|\sin\frac{x-y}{2}\right|}_{|\sin x| \leq |x|} \leq 2\left|\frac{x-y}{2}\right| = |x-y| < \delta = \epsilon\,.$$

Und für den Sinus gilt das Analoge (ÜA)

Die Sinusfunktionen sind demnach auf ganz $\mathbb{R}$ stetig. Daraus folgt, dass sie auch auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind. Es gilt also

$$\mathbb{D}_{\sin} = \mathbb{R}$$
$$\mathbb{D}_{\cos} = \mathbb{R}$$

Bei den Tangensfunktionen verhält sich das etwas anders, da diese beiden Funktionen den Sinus oder Kosinus im Nenner stehen haben. Da wir schon so schön zusammengefasst haben wann die Sinusfunktionen verschwinden, können wir die Definitionsbereiche für die Tangensfunktionen leicht aufschreiben:

$$\mathbb{D}_{\tan} = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \neq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) , \; k \in \mathbb{Z}\right\}$$
$$\mathbb{D}_{\cot} = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq (k\pi) , \; k \in \mathbb{Z}\}$$

Eingeschränkt auf die Definitionsbereiche gilt dann, dass

$$\tan : \mathbb{D}_{\tan} \to \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \cot : \mathbb{D}_{\cot} \to \mathbb{R}$$

stetig sind.

Beispiel 76 Stetigkeit der Tangensfunktion Die Funktion $f(x) = \tan x$ ist auf $\mathbb{D}_{\tan}$ stetig.

$$|f(x) - f(y)| = |\tan x - \tan y| = \left|\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin y}{\cos y}\right| = \frac{|\sin x \cos y - \sin y \cos x|}{|\cos x \cos y|}$$
$$= \frac{|\sin(x-y)|}{|\cos x \cos y|} \leq \frac{1}{|\cos x \cos y|}|x-y| < \frac{1}{|\cos x \cos y|}\delta$$

diesen Ausdruck können wir durch ein ϵ beschränken, solange der Bruch

$$\frac{1}{|\cos x \cos y|} \leq C$$

beschränkt ist. Das ist der Fall, da wegen des Definitionsbereichs $x, y \neq (k+\frac{1}{2})\pi$ ist für $k \in \mathbb{Z}$. Es gilt dann weiter

$$\leq \epsilon \qquad \text{mit} \quad \delta := \frac{1}{C}\epsilon .$$

Das Analoge gilt dann auch für den Kotangens (ÜA)

</Für_den_geneigten_Leser>

Im Hinblick auf die Invertierbarkeit der Trigonometrischen Funktionen sind diese auf Bijektivität zu prüfen. Betrachten wir alle Funktionen eingeschränkt auf ihren Definitionsbereich und den entsprechend zugehörigen Bildmengen so stellen wir fest, dass zwar alle Trigonometrischen Funktionen surjetiv, nicht aber injektiv sind. Für jede dieser Funktionen kann aber ein Teilintervall im Definitionsbereich bestimmt werden, auf den eingeschränkt die Funktion dann auch injektiv, also insgesamt bijektiv und in diesem Bereich dann invertierbar ist. Abbildung 32 soll diesen Sachverhalt verdeutlichen.

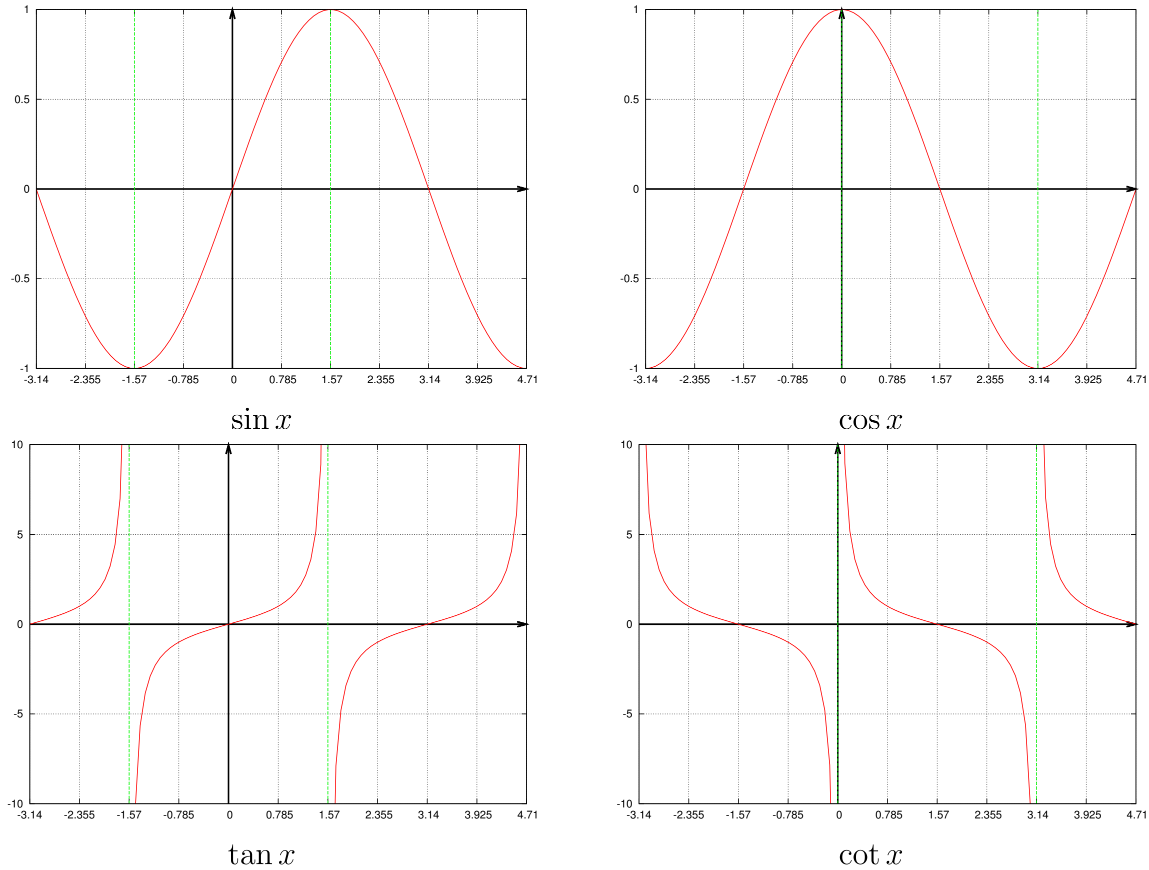


Abbildung 31: Abschnitte in denen die Trigonometrischen Funktionen bijektiv sind

Definition 91: Arkusfunktionen: Die Abbildungen

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1] \qquad \cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$$
$$\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R} \qquad \cot : (0, \pi) \to \mathbb{R}$$

sind bijektiv. Die Umkehrfunktionen der Trigonometrischen Funktionen heißen *Arkusfunktionen* und lauten

$$\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \qquad \arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$
$$\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \qquad \operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$$

Es gibt unendlich viele Intervalle, auf die eingeschränkt die Sinusfunktionen bijektiv sind. Die, in Definition 91 angegebenen, sind konventionell festgelegt und darüber sind die Arkusfunktionen definiert. Sie werden diese und keine anderen Umkehrfunktionen in Ihrem Taschenrechner vorfinden.

Eine grafische Darstellung der Umkehrfunktionen ist in Abbildung 32 gegeben.

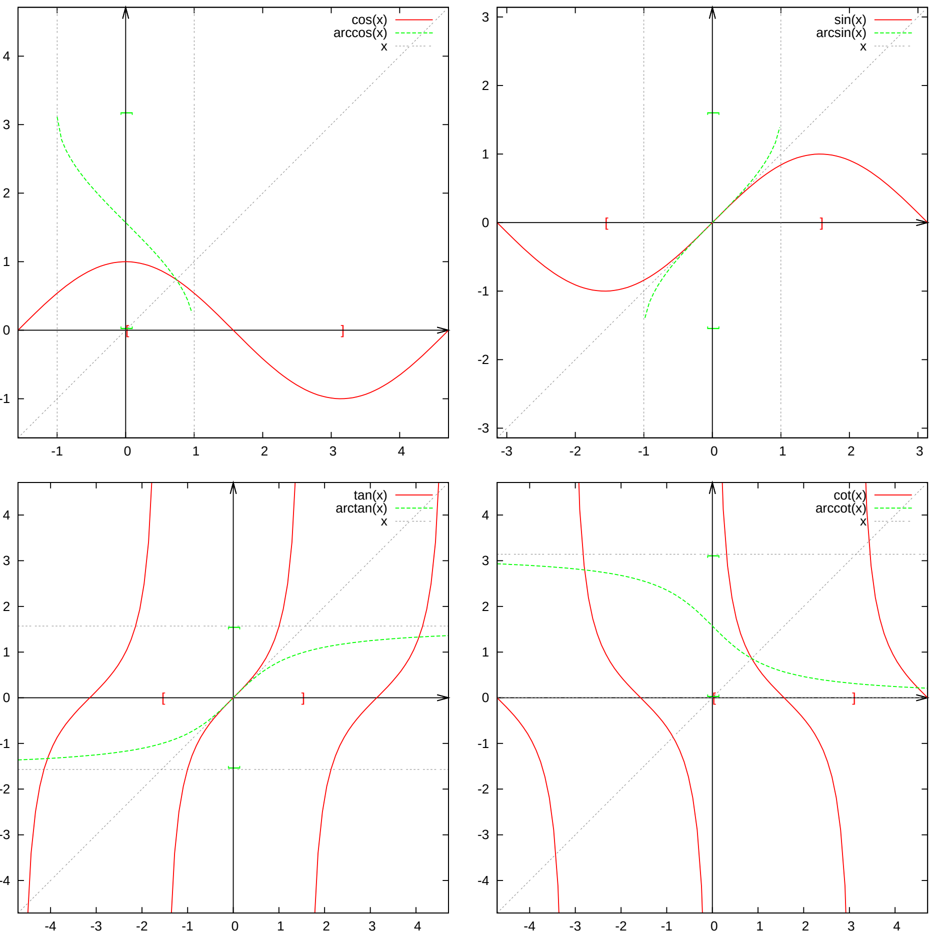


Abbildung 32: Die Trigonometrischen Funktionen und ihre Umkehrabbildungen

Vorsicht ist geboten bei der Berechnung des Winkels φ. In Kapitel 6.1 haben wir den Arkustangens definiert als eine Abbildung

$$\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) .$$

Die Einschränkung kam daher, dass die Arkusfunktion nur auf dem Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (modulo Periodizität) bijektiv, also umkehrbar ist.

Wollen wir für einen Punkt $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ den Winkel zur x–Achse bestimmen, dass heißt $\arctan(y/x)$ lösen, so wird uns die Arkustangensfunktion nur Werte für den ersten und vierten Quadranten liefern. Was aber wenn der Punkt ganz klar "links" der y–Achse liegt?

Wir machen vor der Winkelberechnung eine Fallunterscheidung, dass heißt wir prüfen zunächst in welchem Quadranten sich unser betrachteter Punkt befindet und verwenden die extra für diesen Zweck definierte Funktion

Definition 92: (atan2) Winkel eines Punktes im $\mathbb{R}^2$ bezüglich der x–Achse erhalten wir durch die folgende Funktion

$$\operatorname{atan2}\left(\frac{y}{x}\right) := \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{für } x > 0 & \text{(1. und 4. Quadrant)} \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{für } x < 0 \wedge y \geq 0 & \text{(2. Quadrant)} \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{für } x < 0 \wedge y < 0 & \text{(3. Quadrant)} \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0 \wedge y > 0 & \text{(positive } y\text{–Achse)} \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0 \wedge y < 0 & \text{(negative } y\text{–Achse)} \\ \text{nicht definiert} & \text{für } x = 0 \wedge y = 0 & \text{(im Ursprung)} \end{cases}$$

Der Definitionsbereich ist

$$\mathbb{D}_{\operatorname{atan2}} = [-\pi, \pi] .$$

Beispiel 77

Wir berechnen nun den Winkel zum Punkt $(-1, -1)$ bezüglich der positiven x–Achse und verwenden dabei die Formel aus Definition 92: Der Punkt $(-1, -1)$ liegt im dritten Quadrant, also gilt

$$\arctan\left(\frac{-1}{-1}\right) = \arctan 1 - \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = \frac{-3\,\pi}{4} ,$$

was im Kreis dem Winkel $\frac{5\,\pi}{4}$ entspricht.

6.2 Differentiation von Trigonometrischen Funktionen

In diesem Abschnitt wollen wir uns die Ableitungen der Trigonometrischen Funktionen klar machen.

Die Ableitungen der Sinusfunktionen erhalten wir, indem wir den Differenzenquotienten bilden und die entsprechenden Grenzübergänge berechnen. Wir beginnen mit $\sin x$. Bevor wir damit starten den Differenzenquotienten zu bilden, müssen wir uns noch von folgender Aussage überzeugen; wir werden apäter von ihr Gebrauch machen.

Lemma 6.1. *Es gilt*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 .$$

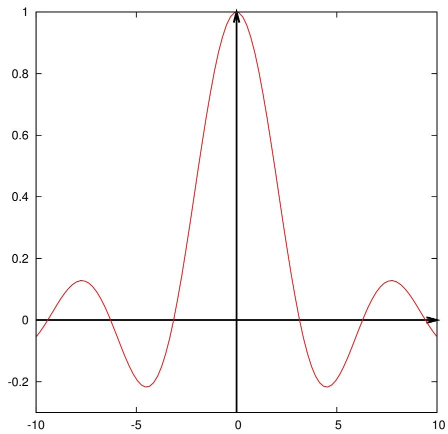


Abbildung 33: Anschauung der links genannten Funktion

In Abbildung 33 sind die Grafen der beiden Funktionen abgebildet, so kann man schon einmal ein Vorgefühl dafür bekommen, dass die Aussagen wohl wahr sind. Nichts desto trotz werden wir den Beweis führen.

Beweis Lemma 6.1:

Wir untersuchen etwas nahe der Null so dürfen wir uns problemlos auf das Intervall $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ *einschränken. Zunächst sei* $x \in (0, \frac{\pi}{4})$*. Dann gilt*

$$
\begin{aligned}
& & 0 < \sin x < x < \tan x & \qquad | : \sin x \\
&\Leftrightarrow & 0 < 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} & \\
&\Leftrightarrow & 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x & \\
&\Rightarrow & 1 = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 1 > \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sin x}{x} > \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \cos x = 1\,. &
\end{aligned}
$$

Unser gesuchter Ausdruck ist nach unten und oben in die 1 *eingespannt und demzufolge muss*

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sin x}{x} = 1$$

gelten. Das war jetzt nur der rechtsseitige Grenzwert aber wir werden schnell einsehen, dass der linksseitige Grenzweite auf das gleiche Ergebnis führt. Es sei also nun $x \in (-\frac{\pi}{4}, 0)$*. Dann gilt:*

$$
\begin{aligned}
& & 0 > \sin x > x > \tan x & \qquad | : \sin x \\
&\Leftrightarrow & 0 < 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} &
\end{aligned}
$$

Die Ungleichheitszeichen haben sich umgedreht, weil $\sin x < 0$ *ist; wir dividierten also mit einem negativen Ausdruck die Ungleichung. Der Rest des Beweis verläuft wie im ersten Fall, so dass insgesamt*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

gilt.

$\square$

Um die Ableitung des Sinus zu klären müssen wir den Differenzenquotienten bilden und schauen, was beim Grenzübergang passiert. Tun wir's also einfach:

$$\sin' x = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \boxtimes$$

Wir verwenden die schon bekannte Beziehung aus Satz 89, Nr. 6

$$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\,,$$

setzen $a = x + h$ und $b = x$ und erhalten damit

$$\begin{aligned}
\boxtimes &= \lim_{h\to 0} \frac{2}{h} \cos \frac{2x+h}{2} \sin \frac{h}{2} \\
&= \lim_{h'\to 0} \cos(x+h') \underbrace{\frac{\sin h'}{h'}}_{\to 1\,,\ \textit{Lemma } 6.1} \quad, \qquad \text{mit } h' = \frac{h}{2} \\
&= \cos x
\end{aligned}$$

□

Genau so gehen wir bei der Ableitung des Kosinus vor.

$$\begin{aligned}
\cos' x &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\
&\overset{\text{Satz } 89.8}{=} \quad - \lim_{h\to 0} \sin\left(\frac{2\,x+h}{2}\right) \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}}_{\to 1\,,\ \textit{Lemma } 6.1} \\
&= -\sin x
\end{aligned}$$

Unter Zuhilfenahme von $\sin' x = \cos$ können Sie auch $\cos' x$ herleiten ohne den Differenzenquotienten und den Grenzwertübergang zu berechnen. Wie geht das? (ÜA)

Die Ableitungen der Tangensfunktionen ergeben sich aus der Quotientenregel und den Ableitungen von Sinus und Kosinus zu

$$\tan' x = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

und

$$\cot' x = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{\cos' x \sin x - \cos x \sin' x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}\,.$$

Etwas spannender ist da nochmal die Frage nach der Ableitung der Umkehrfunktionen. Zunächst einmal gehen wir so vor, dass wir den Satz über Ableitungen von Umkehrfunktionen (Satz 72) verwenden, da wir ja die Ableitungen von $\sin$, $\cos$, $\tan$ und $\cot$ bereits kennen und verwenden können.

Ableitung vom Arkussinus:

Aus Kapitel 4.3 (S. 66) vom letzten Semester wissen wir, dass die Ableitung der Umkehrfunktion so aussieht

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

Wie müssen also nur noch den Term

$$\cos(\arcsin x)$$

ein wenig umformen:

$$\begin{aligned}
& & \cos^2(\arcsin x) &= a^2 \\
&\Leftrightarrow & \cos^2(\arcsin x) + \sin^2(\arcsin x) &= a^2 + \sin^2(\arcsin x) \\
&\Leftrightarrow & 1 &= a^2 + x^2 \\
&\Leftrightarrow & \sqrt{1-x^2} &= a \\
&\Rightarrow & \cos(\arcsin x) &= \sqrt{1-x^2} \\
&\Rightarrow & \arcsin' x &= \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$

Achtung: Wenn wir das Argument nicht in Bogenmaß sondern in Winkel wählen, so müssen wir bei der Ableitung den entsprechendne Umrechnungsfaktor nachdifferenzieren. Es ist nämlich für $x \in [0^\circ : 360^\circ]$

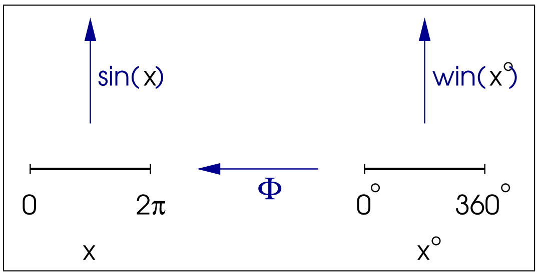
$$\frac{d}{dx} \sin x = \frac{\pi}{180} \cos x\,!$$

Sie können das mal an Ihrem Taschenrechner ausprobieren. Stellen Sie `grad` ein und erzeugen Sie eine grafische Darstellung von der Ableitung vom Sinus. Sie werden feststellen, dass der Wert der dargestellten Kurve bei $x = 0^\circ$ nicht eins ist. Woran liegt das?

Um das einzusehen müssen wir uns die Mühe machen und den Sachverhalt penibel genau hinschreiben: Erinnern wir uns noch einmal an die Definition einer Funktion: Dazu gehört der Definitionsbereich, der Bildbereich und die Abbildungsvorschrift. Wenn wir also zwischen Winkel und Bogenmaß wechseln, so verwenden wir im Grunde zwei verschiedene Funktionen, die trügerischerweise den gleichen Namen haben, nämlich $\sin$, aber eigentlich sind das zwei verschiedene Funktionen. Nennen wir einmal den Sinus, der mit Winkeln arbeitet Winus oder kurz win. Es sei also

$$\begin{aligned}
\sin:\ [0, 2\,\pi] &\to \mathbb{R} \\
x &\mapsto \sin(x)
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
\mathrm{win}:\ [0^\circ, 360^\circ] &\to \mathbb{R} \\
x^\circ &\mapsto \mathrm{win}(x^\circ)
\end{aligned}$$

Die Crux besteht nun darin, dass wir die Herleitung der Ableitung für den Sinus und nicht den Winus gemacht haben. Wir kennen $\mathrm{win}'(x^\circ)$ gar nicht. Wenn wir also den Winus ableiten wollen, so müssen wir diese Funktion über den Sinus beschreiben und dann können wir die Ableitung berechnen.



$$\begin{aligned} & & \Phi(x^\circ) &= \frac{\pi}{180}x^\circ = x \\ &\Rightarrow & \operatorname{win}(x^\circ) &= \sin\left(\Phi(x^\circ)\right) \\ &\Rightarrow & \frac{d}{dx^\circ}\operatorname{win}(x^\circ) &= \frac{d}{dx^\circ}\sin\left(\Phi(x^\circ)\right) \\ & & &= \frac{d}{d\Phi}\sin\left(\Phi(x^\circ)\right)\frac{d}{dx^\circ}\Phi(x^\circ) \\ & & &= \cos\left(\Phi(x^\circ)\right)\frac{\pi}{180} \end{aligned}$$

Geben wir noch dem Kosinus auf $[0^\circ, 360^\circ]$ einen eigenen Namen, etwa cow, für welchen dann analog $\operatorname{cow}(x^\circ) = \cos\left(\Phi(x^\circ)\right)$ gilt, so ist das Gesamtergebnis

$$\operatorname{win}'(x^\circ) = \frac{\pi}{180}\operatorname{cow}(x^\circ)\,.$$

Ableitung vom Arkustangens:

Machen wir zunächst eine kleine Vorabrechnung:

$$\begin{aligned} & & \cos^2(\arctan x) + \sin^2(\arctan x) &= 1 \\ &\Leftrightarrow & \cos^2(\arctan x)\left(1 + \frac{\sin^2(\arctan x)}{\cos^2(\arctan x)}\right) &= 1 \\ &\Leftrightarrow & \cos^2(\arctan x)\left(1 + \tan^2(\arctan x)\right) &= 1 \\ &\Leftrightarrow & \cos^2(\arctan x)\left(1 + x^2\right) &= 1 \\ &\Leftrightarrow & \cos^2(\arctan x) &= \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

Das können wir nun gut einsetzen in

$$\arctan' x = \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \cos^2(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$$

voilà!

Ableitung vom Arkuskosinus und Arkuskotangens:

Daran dürfen Sie sich nun ein wenig selbst versuchen (ÜA).

Wenn Sie sich die Ableitungen der Arkusfunktionen anschauen, so erkennen Sie sicher Formen der Stammfunktionen von echt gebrochen rationalen Funktionen mit quadratischen Faktoren im Nenner wieder (Kapitel 5.2, S. 123)

Wir sammeln noch alles, was wir herausgefunden haben:

Satz 93: Ableitungen aller trigonometrischen Funktionen und ihrer Umkehrabbildungen:

- $\sin' x = \cos x$
- $\cos' x = -\sin x$
- $\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $\cot' x = \frac{-1}{\sin^2 x}$
- $\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$
- $\operatorname{arccot}' x = \frac{-1}{1+x^2}$

6.3 Integration IV

Die Stammfunktionen der Trigonometrischen Funktionen können wir nun aus all unserem bisherigen Wissen herleiten. Es ist ganz einfach.

Nun, wir wissen, dass $\sin' x = \cos x$. Daraus folgt direkt, dass

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

gilt.

Mit $f(x) := \sin x$ gilt

$$\int \cot x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln |f(x)| + C = \ln |\sin x| + C \, .$$

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\arcsin x}_{v} \, dx &= u\, v - \int u\, v' \\
&= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\
&= x \arcsin x - \int x\,(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \, dx \\
&= x \arcsin x + \int \left((1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right)' \, dx \\
&= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\arctan x}_{v} \, dx &= u\,v - \int u\,v' \\ &= x \, \arctan x - \int x \frac{1}{1+x^2} \, dx \\ &= x \, \arctan x - \frac{1}{2} \ln |x^2 + 1| + C\end{aligned}$$

Fassen wir alles (inklusive der ÜA) zusammen:

Satz 94: Stammfunktionen von Trigonometrischen Funktionen:

1. $\int \sin x \, dx = -\cos x$
2. $\int \cos x \, dx = \sin x$
3. $\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x|$
4. $\int \cot x \, dx = \ln|\sin x|$
5. $\int \arcsin x \, dx = x \, \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$
6. $\int \arccos x \, dx = x \, \arccos x - \sqrt{1-x^2}$
7. $\int \arctan x \, dx = x \, \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$
8. $\int \operatorname{arccot} x \, dx = x \operatorname{arccot} x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

6.4 Schwingungslehre

Wir sind im Alltag permanent von periodischen Bewegungen umgeben. Sie treten in allen Fachbereichen auf:

Biologie von außen induzierte, an Tag, Monat oder Jahr gekoppelte Rhythmen (z.B. Blattstellungen .., Menstruationszyklus .., Wachstum bei Bäumen ..) autonome Rhythmen (z.B. EKG, Blutdruck, pulsierende Lumineszens, ökologische Einschwingprozesse)

Physik Schwingungen und Wellen aller Art (in Mechanik, Optik, E-Lehre, Quantenmechanik, eigentlich überall)

Technik Wechselstrom, Taktfrequenz beim PC, Radiowellen etc.

Musik Akustik, Welleneigenschaft des Schalls

Chemie Oszillierende Reaktionen

Geographie Jahreszeiten abhängige Vorgänge wie Sonnenscheindauer, Temperaturen .. Ebbe und Flut

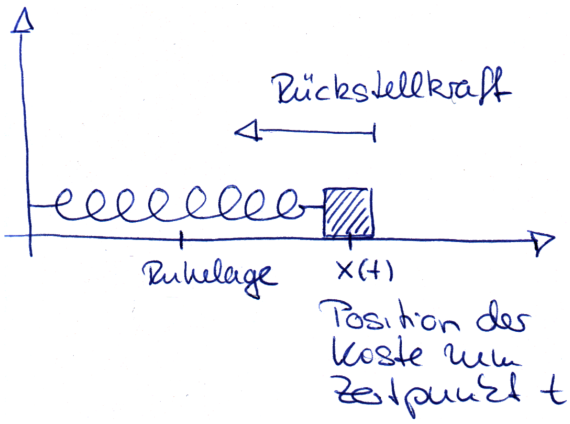
Astronomie Sonnenfleckaktivitäten, Sternhelligkeiten .

Einige periodische Prozesse lassen sich durch harmonische Schwingungen beschreiben.

Beispiel 78 Harmonischer Oszillator

Ein System, das in der Lage ist Schwingungen auszuführen, heißt *Oszillator*. Damit Schwingungen entstehen können, muss das System durch eine äußere Störung (Anstoß) aus seinem Gleichgewichtszustand (Ruhelage) gebracht werden und es müssen Kräfte vorhanden sein, die das System wieder in Richtung der Ruhelage bewegen (Rückstellkräfte).

- Unter *Ruhelage* versteht man den Zustand eines Oszillators bevor eine äußere Störung stattfindet.
- *Rückstellkräfte* sind im Oszillator vorhandene Kräfte, die auf die Ruhelage gerichtet sind.



Ein aus der Ruhelage gebrachter Oszillator hat das Bestreben, in die Ruhelage zurückzukehren. Jede mechanische Schwingung ist eine ständige Umwandlung von kinetischer in potentielle Energie und umgekehrt.

Definition 95: (harmonische) Schwingung:
Einen Vorgang, den man durch eine periodische Funktion beschreiben kann heißt *Schwingung*.
Eine Schwingung, die sich durch eine Funktion $f(t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(t) = A\sin(\omega t + \varphi), \qquad \omega, \varphi, A \in \mathbb{R}$$

beschreiben läßt heißt *harmonisch*.

Neben dem Sinus ist der Cosinus mit $\cos t = \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$ ebenfalls ein Sinusoid, die anderen Trigonometrischen Funktionen jedoch nicht.

Definition 96: Notationen zur Sinuskurve: Es sei $f(t)$ eine zeitabhängige Funktion, die eine Schwingung beschreibt mit der Form

$$f(t) = A\sin(\omega\, t + \varphi)\,.$$

- A heißt *Amplitude* und beschreibt die größte Auslenkung von $f(t)$.
- $\omega\, t + \varphi$ heißt $Phase$ und φ die $Nullphase$ oder auch $Phasenverschiebung$.
- ω heißt *Schwingungs–* oder auch *Kreisfrequenz*.
- Die $Periode$ beträgt $T = \frac{2\pi}{\omega}$ und
- die $Frequenz$ ist gegeben durch $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$.

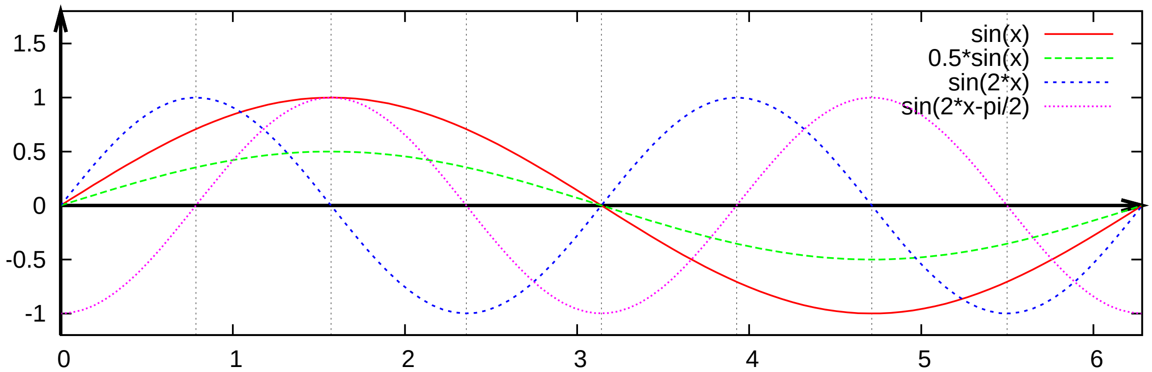


Abbildung 34: Verschiedene Formen der Sinuskurve

Definition 97: Überlagerung von Schwingungen:
Die $Überlagerung$ zweier Schwingungen $f_1(t)$ und $f_2(t)$ ist punktweise definiert, das heißt ihre Auslenkungen addieren sich:

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t)$$

Die Überlagerung ist im Allgemeinen nicht mehr periodisch, es sei denn $f_1(t)$ und $f_2(t)$ besitzen die gleiche Periode.

Satz 6.2. *Sei $f(t)$ eine harmonische Schwingung, dann gilt*

$$\omega^2\, f(t) + f''(t) = 0$$

Beweis: Der Beweis ist eine kleine Übungsaufgabe.

Beispiel 79 Harmonischer Oszillator

Beim harmonischen Oszillator (siehe Beispiel 78) beschreibe $x(t)$ die Position der Kiste in x-Achsenrichtung zum Zeitpunkt t. $t = 0$ sei der Startzeitpunkt, das heißt der Zeitpunkt der ersten erzwungenen Auslenkung auf Position $x(0)$. Die Bewegung der Kiste (ohne Reibung!) im Zeitintervall $[0, T]$ wird dann beschrieben durch die Gleichung

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2\, x(t) \qquad \text{in } (0, T) \tag{19}$$

$$x(0) = x_0 \tag{20}$$

$$\dot{x}(0) = d_0 \qquad \text{auf } \{0\} \tag{21}$$

Gleichung (19) ist eine *Gewöhnliche Differentialgleichung*, die den horizontalen Bewegungsablauf beschreibt. $\omega \in \mathbb{R}$ ist eine Konstante, die Materialeigenschaften der Feder beinhaltet. Die Bewegung hängt schließlich davon ab, wie "weich" die Feder ist. Die Gleichungen (20) und (21) sind die sogenannten *Anfangswerte*, die die Startsituation beschreiben. Insgesamt heißt das System *Anfangswertproblem*.

Wie löst man diese Gleichung und warum benötigen wir zwei Anfangswerte? Die Form der Gleichung sagt uns, dass es sich bei einer Lösung um eine harmonische Schwingung handelt. Harmonische Schwingungen können wir sowohl mit dem Sinus als auch mit dem Cosinus beschreiben. Als Ansatz für eine Lösung wählen wir die Linearkombination aus den beiden Lösungsmöglichkeiten:

$$\begin{aligned}
& & x(t) &= C_1 \sin(\omega\, t) + C_2 \cos(\omega\, t) \\
&\Rightarrow & \dot{x}(t) &= C_1\omega \cos(\omega\, t) - C_2\omega \sin(\omega\, t) \\
&\Rightarrow & \ddot{x}(t) &= -C_1\omega^2 \sin(\omega\, t) - C_2\omega^2 \cos(\omega\, t) \\
& & &= -\omega^2 (C_1 \sin(\omega\, t) + C_2 \cos(\omega\, t)) \\
& & &= -\omega^2\, x(t)
\end{aligned}$$

Unsere im Ansatz gewählte Funktion erfüllt also die Gleichung (19). Was bleibt sind zwei Bedingungen (20) und (21) und zwei Freiheitsgrade, das heißt zu bestimmende Koeffizienten C_1 und C_2. Aus

$$x(0) = C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 = C_2 = x_0$$

und

$$\dot{x}(0) = C_1\omega \cos 0 - C_2\omega \sin 0 = C_1\omega = d_0$$

folgt

$$x(t) = \frac{d_0}{\omega} \sin(\omega\, t) + x_0 \cos(\omega\, t)\,.$$

Besitzen zwei harmonische Schwingungen die gleiche Kreisfrequenz so ist ihre Überlagerung ($Superposition$) wieder eine harmonische Schwingung, die gegeben ist durch

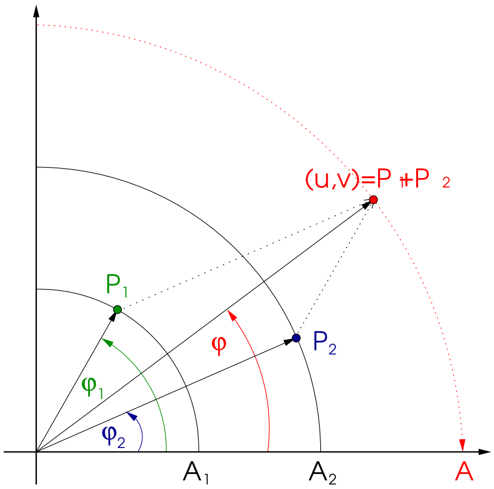
$$A \sin(\omega\, t + \varphi) = A_1 \sin(\omega\, t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega\, t + \varphi_2) \tag{22}$$

Dabei ist

$$A = \sqrt{u^2 + v^2} \qquad \text{und} \qquad \tan\varphi = \frac{u}{v}$$

mit

$$u = A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2$$
$$v = A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2$$



Satz 98: Superposition: Das Aufaddieren von Schwingungen gleicher Frequenz ergibt

$$A\sin(\omega\, t + \varphi) = A_1 \sin(\omega\, t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega\, t + \varphi_2)$$

mit

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2\, A_1 A_2 (\cos(\varphi_1 - \varphi_2))} \qquad \tan\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}$$

Allgemein formuliert:

$$A\sin(\omega\, t + \varphi) = \sum_{i=1}^{n} A_i \sin(\omega\, t + \varphi_i)$$

Integration V
Ableiten ist ein Handwerk; Integrieren eine Kunst 7

Wir behandeln:

- Wir verschieben und verzerren das Integrationsgebiet
- Wir schieben Integrationsgrenzen bis in's Unendliche
- Wir berechnen die Länge eines Grafen
- Wir Berechnen Volumen und Oberfläche von rotationssymmetrischen Körpern, die durch Grafen beschrieben werden

Wir wollen zunächst unsere Auswahl an Integrationsmethoden um die der Substitution erweitern. Integration durch Substitution, im Höherdimensionalen auch bekannt unter dem Namen Transformationsformel, ist leicht in der Anwendung und ein unverzichtbares Mittel: Wenn wir bei einem gegebenen bestimmten Integral das Integrationsgebiet durch Translation und Stauchung verändern so müssen entsprechende Transformationen auf den Integranten angewendet werden, damit der Wert des Integrals erhalten bleibt. Das Ziel ist nun, solche Transformationen zu finden, die einen Integranten "erschaffen", dessen Stammfunktion man kennt, womit die Berechnung des Integrals zu einem Kinderspiel wird. Wenn wir eine Funktion über einem Intervall integrieren wollen, die eine Polstellen der Funktion enthält so ist es dennoch möglich, dass eine Stamfunktion auf dem ganzen Intervall existiert. Bei der Untersuchung dieser Situation werden Grenzwerte für variable Integrationsgrenzen berechnet. Wir sprechen dann von uneigentlicher Integration. Eine weitere uneigentliche Integration ist gegeben, wenn das Integral zwar bestimmt ist aber die Grenzen in's Unendliche gehen. Auch hier müssen Grenzwerte untersucht werden und auch hier spricht man von uneigentlicher

Integration.

7.1 Integration durch Substitution

Aus der Produktregel für Ableitungen haben wir die partielle Integration hergeleitet:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$\rightsquigarrow$

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

Aus der Kettenregel haben wir den Spezialfall "Zähler ist Ableitung vom Nenner" hergeleitet – eine wunderschöne Regel die leider keinen eigenen Namen besitzt..., oder doch?:

$$(\ln(g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$\rightsquigarrow$

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \ln|g(x)| + C$$

Dies läßt sich auch verallgemeinern auf beliebige Funktionen $f(x)$:

$$(f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)$$

$\rightsquigarrow$

$$\int f'(g(x))g'(x)\,dx = f(g(x)) + C$$

Darauf begründet sich die sogenannte Substitutionsregel[10]:

Satz 99: Substitutionsregel: Man substituiere gemäß $x = g(t)$. Dann ist $dx = g'(t)\,dt$ und es gilt

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt\,.$$

Beispiel 80

[10]Integration durch Substitution ist auch bekannt als Transformationsformel oder Transformationsansatz, wobei man dann eher an Integration in höheren Dimensionen denkt. Das Prinzip ist aber das gleiche.

$$\int (2-3x)^4\,dx \qquad \text{Substitution:} \quad t = 2-3x$$

$$dt = -3\,dx$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{3}\int t^4\,dt \\ &= -\frac{1}{15}t^5 + C \\ &= -\frac{1}{15}(2-3x)^5 + C \end{aligned}$$

Beispiel 81

$$\int 3x^2 \mathrm{e}^{x^3}\,dx \qquad \text{Substitution:} \quad t = x^3$$

$$dt = 3x^2\,dx$$

$$\begin{aligned} &= \int \mathrm{e}^t\,dt \\ &= \mathrm{e}^t + C \\ &= \mathrm{e}^{x^3} + C \end{aligned}$$

Beispiel 82

Wenn es bis auf einen konstanten Faktor nicht passt ...

$$\int x^2 \mathrm{e}^{x^3}\,dx$$

... dann macht man sich den einfach passend!

$$= \frac{1}{3}\int 3x^2 \mathrm{e}^{x^3}\,dx \qquad \text{Substitution:} \quad t = x^3$$

$$dt = 3x^2\,dx$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3}\int \mathrm{e}^t\,dt \\ &= \frac{1}{3}\mathrm{e}^t + C \\ &= \frac{1}{3}\mathrm{e}^{x^3} + C \end{aligned}$$

Und warum ist die Situation Zähler gleich Ableitung des Nenners ein Spezialfall der Substitutionsformel? Ganz einfach:

$$\begin{aligned}\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx & \\ &= \int \frac{1}{f}\,df && \text{Substitution:} \quad \frac{df}{dx} = f' \\ & && \qquad\qquad\quad df = f'\,dx \\ &= \ln|f(x)| \end{aligned}$$

Wollen wir die Regel der Substitution auf bestimmte Integrale übertragen so müssen wir noch die Integrationsgrensen korrigieren:

Satz 100: Substitutionsregel: Mit $x = g(t)$ und $dx = g'(t)\,dt$ gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))g'(t)\,dt\,.$$

Hinter der Substitutionsformel steckt nämlich eine Transformation. Stellen Sie sich vor, sie wollten

$$\int_0^2 f(x)\,dx$$

berechnen und dazu die Transformation $g(x) = x + 1$ zu Hilfe nehmen. $f(g(x)) = f(x+1)$ ist gerade f um eins nach links verschoben. Damit der Integralwert erhalten bleibt müssen die Integrationsgrenzen 0 und 2 ebenfalls nach links verschoben werden. Siehe Abbildung 35 (links). Dann gilt also

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_{-1}^1 f(x+1)\,dx\,.$$

Wir können dies allgemeiner formulieren. Mit $g^{-1}(x) = x - 1$ gilt

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_{g^{-1}(0)}^{g^{-1}(1)} f(g(x))\,dx\,.$$

g ist in diesem Fall nur eine Verschiebung, wir nennen das auch Translation, das heißt $g'(x) = 1$. Bei einer Stauchung oder Dehnung, das bedeutet, dass die Ableitung von g nicht mehr konstant sein muss oder wenn, dann ungleich 1, muss der Integrant mit einem entsprechenden Faktor korrigiert werden, da er durch g ebenfalls gedehnt oder gestaucht wird. Der Stauchungsfaktor entspricht gerade der Ableitung von g. Nehmen wir einmal

$$v(x) = 2(x+1) \qquad \text{und} \qquad v^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - 1\,.$$

Dann ist

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_{v^{-1}(0)}^{v^{-1}(2)} f(v(x))v'(x)\,dx = \int_{-1}^{0} f(2x+1)2\,dx\,.$$

Zur Veranschaulichung sind die Grafen für $f(x) = x^2$ in Abbildung 35 (rechts) dargestellt.

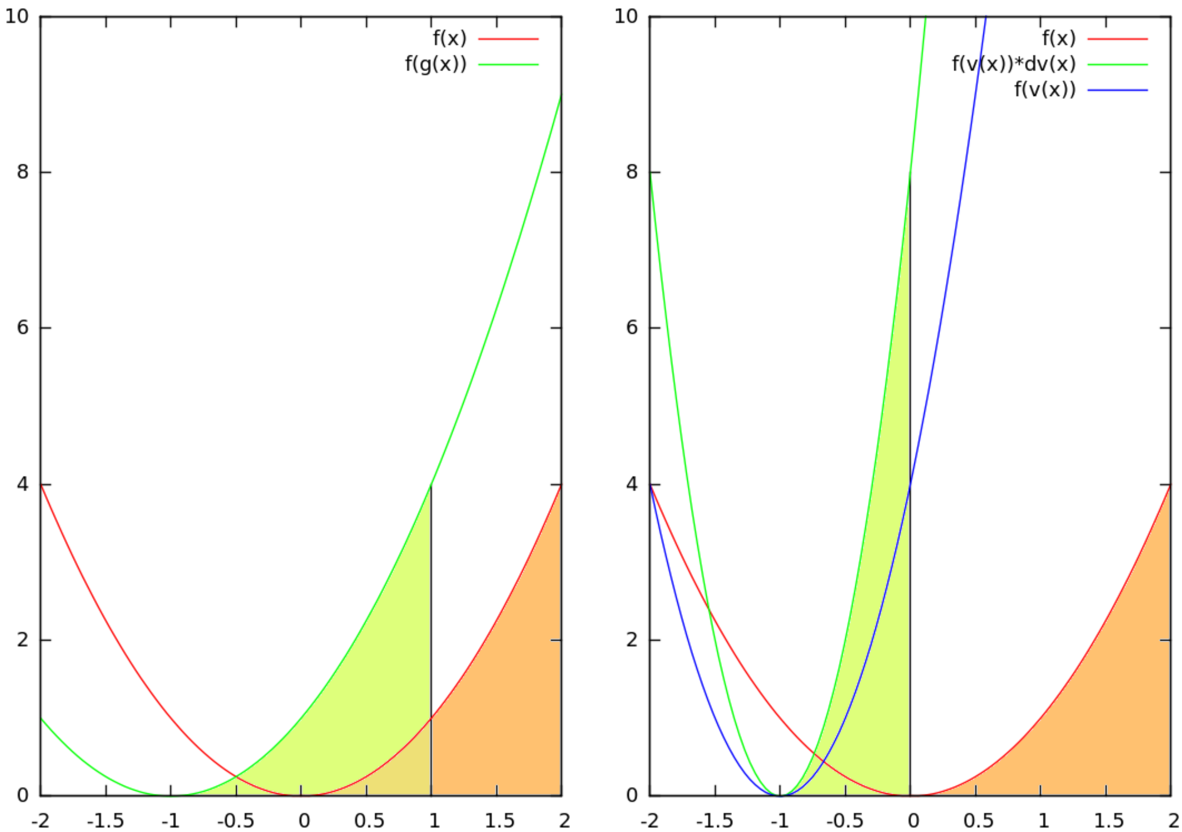


Abbildung 35: links: Translation von $f(x)$ um $x+1$. rechts: Transformation von $f(x)$ um $2(x+1)$

Wenn wir unser Beispiel mal durchrechnen, sieht das so aus:

$$\int_0^2 (2(x+1))^2 \, dx \qquad g(x) = 2(x+1)$$

$$g'(x) = 2$$
$$f(x) = x^2$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 f(g(x))g'(x) \, dx = \frac{1}{2} \int_{g(0)}^{g(2)} f(g) \, dg$$

$$= \frac{1}{2} \int_2^6 g^2 \, dg = \frac{1}{6} \left[g^3\right]_2^6 = \frac{1}{6} \left(6^3 - 2^3\right) = \frac{104}{3}$$

Ein typischer Fehler bei der Anwendung der Substitutionsregel ist die falschen Integrationsgrenzen zu verwenden: Entweder wir machen eine Rücktransformation und verwenden die Originalgrenzen oder aber wir werten die Stammfunktion des transformierten Integranten aus und wählen dann auch die transformierten Integrationsgrenzen!!!

7.2 Uneigentliche Integrale

Wann immer bei einem Integral der Form

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

irgendwas "unendlich" ist, sprechen wir von uneigentlicher Integration. Es könnte etwa sein, dass entweder $a = -\infty$ oder $b = \infty$ ist oder aber die Funktion f an einer Stelle $\eta \in [a, b]$ nicht existiert (Es handelt sich um ein UND-eingeschlossenes ODER.). Die Frage, die sich dann stellt ist die Frage nach der Existenz des Integrals oder anders formuliert, danach, ob das angegebene uneigentliche Integral einen beschränkten Wert hat. A-priori ist das nicht klar sondern muss in jedem Fall speziell untersucht werden. Wir werden in diesem Zusammenhang noch etwas über Grenzwerte von Funktionen kennenlernen. Zunächst ein Beispiel:

Beispiel 83 Das Integral

$$\int_0^1 \frac{1}{x^s} \, dx$$

konvergiert für $s < 1$. Denn:

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{x^s}\,dx &= \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_\epsilon^1 \frac{1}{x^s}\,dx \\
&= \begin{cases}
\left[\frac{1}{1-s} x^{1-s}\right]_\epsilon^1 = \frac{1}{1-s}\left(1 - \frac{\epsilon^1}{\epsilon^s}\right) \xrightarrow{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{1-s} & s < 1 \\
\left[\frac{1}{1-s} x^{1-s}\right]_\epsilon^1 = \frac{1}{1-s}\left(1 - \frac{\epsilon^1}{\epsilon^s}\right) \xrightarrow{\epsilon \searrow 0} \infty & s > 1 \\
\left[\ln x\right]_\epsilon^1 = -\ln \epsilon \xrightarrow{\epsilon \searrow 0} \infty & s = 1
\end{cases}
\end{aligned}
$$

Definition 101: Uneigentliche Integrale:

1. Sei $f : [a,\infty[\to \mathbb{R}$ eine Funktion, die über jedem Intervall $[a,R]$, $a < R < \infty$ Riemann–integrierbar ist. Falls der Grenzwert $\lim_{R\to\infty} \int\limits_a^R f(x)\,dx$ existiert, heißt das Integral
$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{R\to\infty} \int\limits_a^R f(x)\,dx$$
konvergent. Analog definiert man das Integral für $f :]-\infty,a] \to \mathbb{R}$.

2. Sei $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die über jedem Teilintervall $[a+\epsilon,b]$, $a < a+\epsilon < b$, Riemann–integrierbar ist. Falls der Grenzwert $\lim_{\epsilon\searrow 0} \int\limits_{a+\epsilon}^b f(x)\,dx$ existiert, so heißt das Integral
$$\int\limits_a^b f(x)\,dx := \lim_{\epsilon\searrow 0} \int\limits_{a+\epsilon}^b f(x)\,dx$$
konvergent. Analog definiert man das Integral für $f : [a,b[\to \mathbb{R}$.

3. Sei $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ eine Funktion, die über jedem Teilintervall $[\alpha,\beta] \subset]a,b[$ Riemann–integrierbar ist und sei $c \in]a,b[$ beliebig. Falls die beiden uneigentlichen Integrale
$$\int\limits_a^c f(x)\,dx = \lim_{\alpha\searrow a} \int\limits_\alpha^c f(x)\,dx$$
und
$$\int\limits_c^b f(x)\,dx = \lim_{\beta\nearrow b} \int\limits_c^\beta f(x)\,dx$$
existieren, heißt das Integral
$$\int\limits_a^b f(x)\,dx := \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$$
konvergent. Diese Definition ist unabhängig von der Wahl von $c \in]a,b[$.

Beispiel 84 In Beispiel 83 haben wir festgestellt, dass das Integral

$$\int_0^1 \frac{1}{x^s}\, dx$$

nur für $s < 1$ konvergiert. Wie sieht es nun aus mit dem Integral

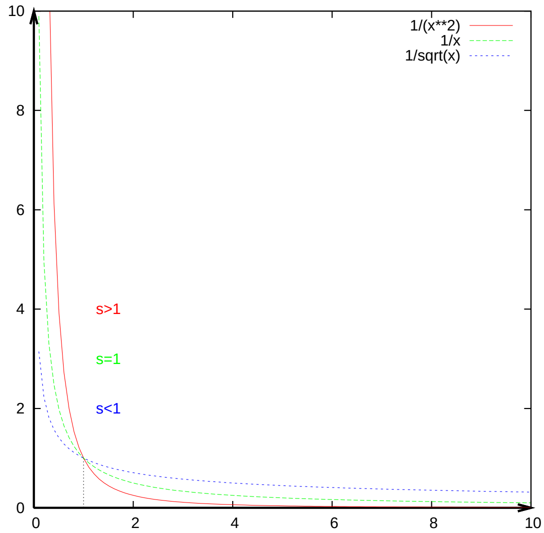
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\, dx\,?$$

$$\int_1^c \frac{1}{x^s}\, dx = \begin{cases} \left[\frac{1}{1-s}x^{1-s}\right]_1^c & = \frac{1}{1-s}\left(c^{1-s}-1\right) \quad \overset{c\to\infty}{\longrightarrow} \infty \qquad s<1 \\ \left[\frac{1}{1-s}x^{1-s}\right]_1^c & = \frac{1}{1-s}\left(c^{1-s}-1\right) \quad \overset{c\to\infty}{\longrightarrow} \frac{-1}{1-s} \qquad s>1 \\ \left[\ln x\right]_1^c & = \ln c \quad \overset{c\to\infty}{\longrightarrow} \infty \qquad s=1 \end{cases}$$

Wir fassen beide Ergebnisse zusammen:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^s}\, dx = \begin{cases} \frac{1}{1-s} & \text{für} \quad s<1 \\ \infty & \text{für} \quad s>1 \\ \infty & \text{für} \quad s=1 \end{cases}$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\, dx = \begin{cases} \infty & \text{für} \quad s<1 \\ \frac{-1}{1-s} & \text{für} \quad s>1 \\ \infty & \text{für} \quad s=1 \end{cases}$$



Es dürfte klar sein, dass das Integral bis ins Unendliche über eine, sagen wir positive Funktion nicht existiert, falls die Funktion im Unendlichen nicht verschwindet. Dies ist eine notwenige aber nicht hinreichende Bedingung. Im obigen Beispiel verschwinden die Funktionen für jede Wahl von s und x gegen unendlich. Dennoch existiert nicht jedes Integral.

Beispiel 85 **Cauchyscher Hauptwert**

In Beispiel 83 haben wir festgestellt, dass die Integrale

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{x^3}\, dx \quad \text{und} \quad \int_0^1 \frac{1}{x^3}\, dx$$

jeweils nicht existieren. Jetzt machen wir einmal Folgendes: Wir zerlegen den integrationsbereich $[-1,1]$ in $[-1,-b] \cup [b,1]$ und bilden dann den Limes $b \searrow 0$:

$$\lim_{b \searrow 0} \left(\int_{-1}^{-b} \frac{1}{x^3}\, dx + \int_{b}^{1} \frac{1}{x^3}\, dx \right) = \lim_{b \searrow 0} \frac{-1}{2} \left(\frac{1}{b^2} - 1 + 1 - \frac{1}{b^2} \right) = 0$$

Und plötzlich existiert da "was". Das scheint im Widerspruch zu dem zu stehen, was wir vorher gezeigt haben.

Erinnern Sie sich an die Grenzwertregeln im vergangenen Semester (Regel 47). Der Limes über die Summe zweier Funktionen ist nur dann gleich der Summe der Limes der jeweiligen Funktionen, wenn diese konvergieren. Also

$$\lim_{x \to a} f(x) < \infty \quad \wedge \quad \lim_{x \to a} g(x) < \infty \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

Bei unserem Beispiel gilt aber

$$\lim_{b \searrow 0} \int_{-1}^{-b} \frac{1}{x^3}\, dx = \infty \quad \wedge \quad \lim_{b \searrow 0} \int_{b}^{1} \frac{1}{x^3}\, dx = -\infty$$

und die Konvergenz dieser beiden Limes war Voraussetzung bei der Definition des Uneigentlichen Integrals (siehe Merkregel 101.3) Daher folgt

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^3}\, dx \overset{!!!}{\neq} \lim_{b \searrow 0} \left(\int_{-1}^{-b} \frac{1}{x^3}\, dx + \int_{b}^{1} \frac{1}{x^3}\, dx \right) .$$

Der Limes der Summe der Funktionen, sofern er existiert, heißt *Cauchyscher Hauptwert*.

Wenn man Grenzwerte sucht und berechnen will sollte man unbedingt einen äußerst wertvollen Trick kennen, nämlich die

Satz 102: von de l'Hospital Die Funktionen f und g seien differenzierbar auf dem Intervall (a,b) und $g'(x) \neq 0$, $x \in (a,b)$. Ferner treffe eine der folgenden Annahmen zu:

- $\lim_{x \searrow a} f(x) = 0 \quad \wedge \quad \lim_{x \searrow a} g(x) = 0$ oder
- $\lim_{x \searrow a} f(x) = \pm\infty \quad \wedge \quad \lim_{x \searrow a} g(x) = \pm\infty$.

Dann ist

$$\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} ,$$

falls der rechts stehende Limes existiert. Das Analoge gilt für $x \nearrow b$.

Unter Umständen ist es notwendig die Regel von de l'Hospital mehrfach hintereinander auszuführen.

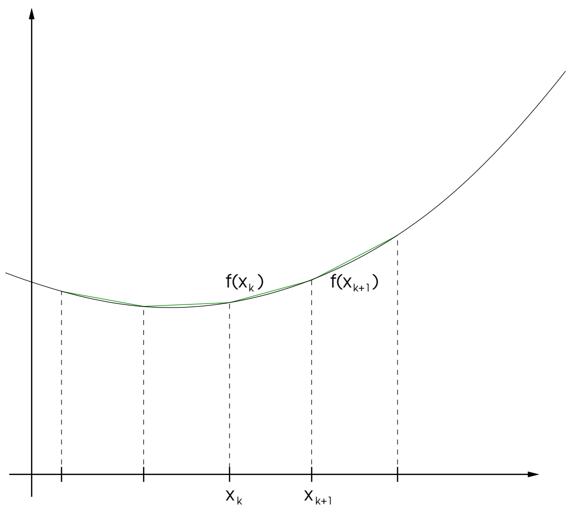
Das heißt in Worten gesprochen: Wenn der Grenzwert $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ unter den oben genannten Voraussetzungen an f und g im eigentlichen oder im uneigentlichen Sinn existiert, dann existiert auch $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

7.3 Anwendungen des Integrals

Wir haben schon gelernt, dass wir mit dem Integral in der Lage sind Flächeninhalte zu berechnen, die von Funktionen aufgespannt werden. Wir werden nun die Anwendungsmöglichkeiten des Integrals erweitern. Zum einen werden wir die Länge von Kurven damit messen können – im Vergleich zu Flächeninhalten, was etwas zweidimensionales ist, messen wir nun etwas eindimensionales – und zum Anderen Volumeninhalte von Rotationskörpern – was dann etwas dreidimensionales ist. Zu guter Letzt, wo wir schon dabei sind, messen wir noch den Flächeninhalt der Oberfläche von Rotationskörpern – das ist dann wieder was zweidimensionales.

7.3.1 Länge eines Grafen



Wir betrachten eine Funktion

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}\,.$$

Wir wollen die Strecke auf dem Grafen f von $f(a)$ bis $f(b)$ berechnen. Wir machen das zunächst näherungsweise und zerlegen dazu das Intervall $[a, b]$ in N Teilintervalle $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 1, \ldots, N$ mit

$$[a, b] = \bigcup_{k=1}^{N} [x_k, x_{k+1}]\,. \tag{23}$$

Es sei $h := |x_{k+1} - x_k| = \frac{b-a}{N}$.

Jedes Sekantenstück $\overline{P_k P_{k+1}}$ hat die Länge L_k mit

$$\begin{aligned} L_k &= \sqrt{h^2 + \left(f(x_k + h) - f(x_k)\right)^2} \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k + h) - f(x_k)}{h}\right)^2}\, h \end{aligned}$$

Wir erhalten näherungsweise die gesuchte Länge L durch Aufsummieren aller Sekantenstücke über $[a, b]$

$$\Rightarrow \qquad L \approx \sum_{k=1}^{N} L_k = \sum_{k=1}^{N} \sqrt{1 + \underbrace{\left(\frac{f(x_k+h) - f(x_k)}{h}\right)^2}_{\to f' \ (h \to 0)} h}$$

Das ist eine Riemann–Summe. Wir bilden den Grenzwert $N \to \infty$ und erhalten

$$\to \int\limits_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

Formel 103: Länge eines Grafen: Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Die Länge L eines Grafen $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von $f(a)$ bis $f(b)$ ist gegeben durch

$$L = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx\,.$$

Beispiel 86 Bogenlänge Die Bogenlänge des oberen Halbkreises mit Radius r:

$$\begin{aligned}
& & f(x) &= \sqrt{r^2 - x^2} \\
&\Rightarrow & f'(x) &= \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \\
&\Rightarrow & \sqrt{1 + (f'(x))^2} &= \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} \\
& & &= \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} & \text{Subst.:} \quad & x = r \sin u \\
& & & & & \frac{dx}{du} = r \cos u \\
&\Rightarrow & \int\limits_{-r}^{r} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx &= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r}{\sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 u}} r \cos u \, du \\
& & &= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r \cos u}{\sqrt{1 - \sin^2 u}}\, du \\
& & &= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r \cos u}{\sqrt{\cos^2 u}}\, du \\
& & &= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r \, du = r \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = r\pi
\end{aligned}$$

Beispiel 87 Bogenlänge Länge des Grafen $f(x) = x\sqrt{x}$ von $(0,0)$ bis $(1,1)$:

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx = \int\limits_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx = \frac{2^3}{3^3}\left[\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{27}(\sqrt{13}^3 - 8) \approx 1.44$$

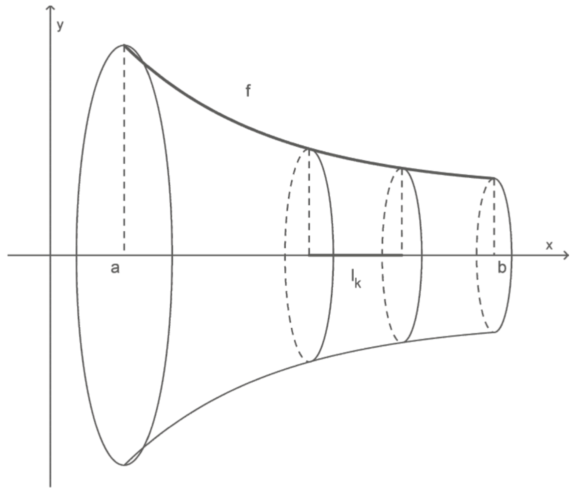
7.3.2 Volumen von Rotationskörpern

Es sei K ein Rotationskörper, der durch Rotation einer Funktion $f(x)$ um die x–Achse entstanden ist. Wir wollen das Volumen $V = |K|$ berechnen.

Wir zerlegen, wie schon so oft, unser Intervall $[a, b]$ in N Teilintervalle, so dass

$$[a,b] = \bigcup_{k=1}^{N} [x_k, x_{k+1}]$$

gilt und zerschneiden an jedem x_k den Rotationskörper K. An den Schnittflächen erhalten wir Kreisscheiben mit dem Radius $f(x_k)$ und dem Flächeninhalt $\pi\, f^2(x_k)$. Wir approximieren das Volumen K durch die Summe der Zylindervolumina



$$\sum_{k=1}^{N} V_k = \sum_{k=1}^{N} \pi\, f^2(x_k)\, h\,,$$

mit $h = x_{k+1} - x_k$.

Sofern $f(x)$ die nötigen Voraussetzungen erfüllt, erhalten wir dadurch wiederum eine Riemannsumme mit

$$V = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \pi\, f^2(x_k)\, h = \int_a^b \pi\, f^2(x)\, dx\,.$$

Formel 104: Volumen eines Rotationskörpers I: Für eine Funktion $f(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) \geq 0$ in $[a,b]$ berechnet sich das Volumen des Rotationskörpers bezüglich der x–Achse durch

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx\,.$$

Beispiel 88 Volumen eines Rotationskörpers Nehmen wir einmal die Funktion $f(x) = x$ und den durch $[0,1]$ beschränkten zugehörigen Rotationskörper. Wir erhalten das Volumen

$$V = \pi \int_0^1 x^2\, dx = \pi \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{\pi}{3}$$

Das ist gerade das Volumen eines Kegels der Höhe 1 und dem Radius 1.

Beispiel 89 Eingeschlossenes Volumen

$f(x) = 3x^2 - x^3$ und $g(x) = x^2$ rotieren um die x–Achse. Wie groß ist das eingeschlossene Volumen?

1. **Schnittstellen** bestimmen: Für welche x gilt $f(x) = g(x)$?

$$\begin{aligned} & 3x^2 - x^3 = x^2 \\ \Leftrightarrow \quad & -x^3 + 2x^2 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & -x^2(x-2) = 0 \\ \Rightarrow \quad & x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_2 = 2 \end{aligned}$$

2. **Differenz:** Das gesuchte Volumen ist die Differenz aus dem Volumen des Rotationskörpers entstanden durch $f(x)$ und dasjenige, entstanden durch $g(x)$

$$V = \pi \int_0^2 f(x)^2 \, dx - \pi \int_0^2 g(x)^2 \, dx$$

3. Jetzt **Integrieren**:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 f(x)^2 - g(x)^2 \, dx \\ &= \pi \int_0^2 (3x^2 - x^3)^2 - x^4 \, dx \\ &= \pi \int_0^2 8x^4 + x^6 - 6x^5 \, dx \\ &= \pi \left[\frac{8}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 - x^6 \right]_0^2 \\ &= \frac{2^8}{5} + \frac{2^7}{7} - 2^6 = \frac{2^6 \cdot 3}{35} = \frac{192}{35} \end{aligned}$$

Das durch f und g eingeschlossene Volumen des entsprechenden Rotationskörpers mit x als Rotationsachse beträgt

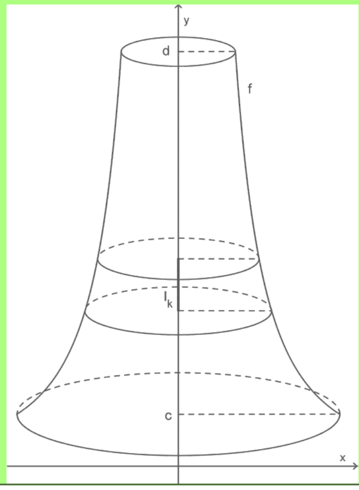
$$V = \frac{192}{35}\,.$$

Was wenn wir das Volumen eines Rotationskörpers, der durch Rotation der Funktion $f(x)$ um die y–Achse entsteht, berechnen wollen? Im Grunde tun wir das Gleiche. Drehen Sie in Gedanken das Koordinatensystem so, dass die y–Achse die Position der x–Achse einnimmt. Sie wenden dann Regel 104 auf die Umkehrfunktion $g(x) = f^{-1}(x)$ von $f(x)$ an:

Formel 105: Volumen eines Rotationskörpers II:

Es sei $f(x)\,:\ [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die auf $[a,b]$ positiv und invertierbar ist. Dreht man das Flächenstück, das durch $f(x)$, die y–Achse und die geraden $y = c$ und $y = d$ entsteht, um die y–Achse so erhält man das Volumen des dadurch entstandenen Rotationskörpers durch

$$V = \pi \int_c^d \left(f^{-1}\right)^2(x)\,dx\,.$$



7.3.3 Mantelflächen

Die Mantelfläche ist die Oberfläche eines Körpers, der durch Rotation entsteht ohne Boden und ohne Deckel. Es gelten die Bezeichnungen wie im vorangegangenen Kapitel. Die Vorgehensweise, den Flächeninhalt der Oberfläche eines Rotationskörpers zu berechnen erfolgt prinzipiell wie bei der Berechnung der Bogenlänge und der Rotationsvolumina. Wir zerlegen das Intervall in N Teilintervalle approximieren den Flächeninhalt bilden den Limes $N \to \infty$ und schauen gespannt was passiert:

Die Mantelfläche der k–ten Scheibe beträgt ungefär:

$$M_k = 2\pi\, f(x_k)\sqrt{1 + f'(x_k)^2}\, h$$

Wir summieren das auf zu

$$\sum_{k=1}^{N} M_k = 2\pi \sum_{k=1}^{N} f(x_k)\sqrt{1 + f'(x_k)^2}\, h\,,$$

machen den Grenzübergang $N \to \infty$, bzw. $h \to 0$ und erhalten

$$M = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx\,.$$

Formel 106: Mantelfläche: Es sei K ein Rotationskörper, der durch Drehung der Kurve $f(x)$, $x \in [a,b]$ um die x–Achse entstanden ist. Die Fläche M des Mantels von K ist gegeben durch

$$M = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$$

Beispiel 90 Mantelfläche eines Paraboloids Es sei $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit

$$f(x) = \sqrt{x}\,.$$

Die Ableitung lautet

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

und die Bogenlänge von $f(x)$

$$\mathrm{BL}(x) = \sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,.$$

Daraus ergibt sich für die Mantelfläche vom Rotationskörper, erzeugt durch $f(x)$ auf $[0,2]$

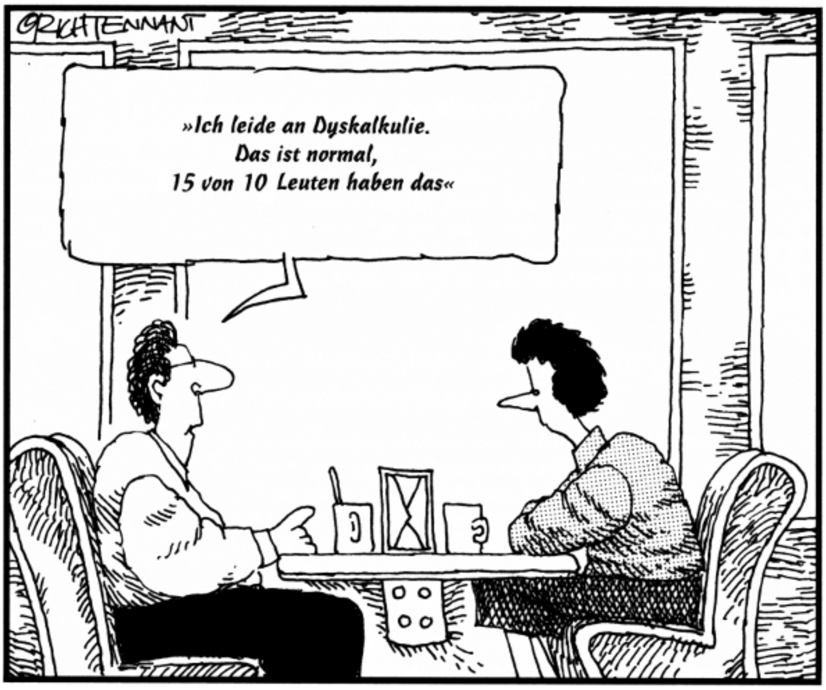
$$\begin{aligned} M &= 2\,\pi \int_0^2 \sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\, dx \\ &= \pi \int_0^2 \sqrt{4x+1}\, dx \\ &= \frac{\pi}{6}\left[(4x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 \\ &= \frac{\pi}{6}\left(9^{\frac{3}{2}}-1\right) \\ &= \frac{13\,\pi}{3} \end{aligned}$$

Potenzreihen

8

Wir behandeln:

- Reihe als Funktion: Potenzreihen (Konvergenzradius)
- Funktion als Reihe: Taylorreihe (Darstellung und Approximation von Funktionen)



In Kapitel 2.3 haben wir gesehen, dass durch das Aufsummieren von Folgengliedern wieder eine Folge entsteht, die wir dann Reihe nennen. In der Praxis tritt in manchen Fällen tatsächlich direkt eine Reihe auf. Es gibt aber noch ein erweitertes Feld der Reihendarstellung, die sogenannten *Potenzreihen*, die bei der Untersuchung und Darstellung von komplizierten Funktionen oder auch der Approximation von Funktionen verwendet werden.

8.1 Was ist das? Eine Funktion!

Definition 107: Potenzreihen: Eine *Potenzreihe* mit Mittelpunkt $x_0 \in \mathbb{R}$ ist eine Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

mit reeller Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dem reellen Mittelpunkt x_0 und einer reellen Variablen x.

Durch die Substitution $y = x - x_0$ können Potenzreihen mit Mittelpunkt x_0 in Potenzreihen mit Mittelpunkt 0 überführt werden:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Im Folgenden werden nur Potenzreihen mit Mittelpunkt 0 betrachtet.

Wie sieht es nun mit der Konvergenz dieser Reihen aus? Für eine spezielle Wahl von x erhalten wir eine gewöhnliche Reihe deren Konvergenz zu überprüfen wir bereits besprochen haben. Diese wird maßgeblich von den Koeffizienten a_n bestimmt. So auch bei der Potenzreihe mit dem Unterschied, dass wir unter Umständen für verschiedene x verschiedene Konvergenzeigenschaften erhalten. Wir müssen also überprüfen für welche x eine Konvergenz besteht und für welche nicht.

Definition 108: **Konvergenzradius:** Falls für fast alle Koeffizienten a_n einer Potenzreihe $a_n \neq 0$ gilt und der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ existiert, so ist der *Konvergenzradius* der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ durch

$$\rho = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$$

gegeben.

Eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ mit Konvergenzradius ρ ist für alle $x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ konvergent und divergiert für $|x - x_0| > \rho$. Das Intervall $K = (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ heißt *Konvergenzintervall* der Potenzreihe.

Das Konvergenzverhalten an den beiden Randpunkten $x_0 \pm \rho$ muss separat untersucht werden. Dazu setzen Sie $x = x_0 \pm \rho$ und untersuchen die entstehende Reihe wie gewohnt auf Konvergenzkriterien.

Genau wie bei der Untersuchung der Reihenkonvergenz gibt es auch bei der Untersuchung der Konvergenz bei Potenzreihen noch weitere Kriterien, die wir nicht betrachten werden.

Beispiel 91 e^x Wir betrachten die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} .$$

Es ist $a_n = \frac{1}{n!}$. Dann führt

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \end{aligned}$$

auf den Konvergenzradius

$$\rho = \infty\,.$$

Die Reihe konvergiert also auf ganz $\mathbb{R}$.

Auf ihrem Konvergenzintervall K ist eine Potenzreihe eine Funktion.

Beispiel 92 Es sei $\sum_{i=0}^{\infty} x^i$ gegeben. Hier stellen die Koeffizienten $a_i = 1$ eine konstante Folge dar. Der Konvergenzradius ist dann gegeben durch $\rho = 1$. Das bedeutet, dass die Reihe auf $K = (-1, 1)$ konvergiert. Für feste x haben wir diese Reihe schon als die Geometrische Reihe kennengelernt:

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}\,, \quad \text{falls } |x| < 1\,.$$

Wollen wir den rechten Rand überprüfe so setzen wir $x = 1$ und erhalten die Reihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} 1\,,$$

welche divergiert. Das Analoge erhalten wir am linken Rand. Die Reihe ist also wirklich nur auf dem offenen Intervall $(-1, 1)$ konvergent.

Satz 109: Rechnen mit Potenzreihen: Beim Rechnen mit Potenzreihen müssen wir darauf achten, dass wir immer im Konvergenzintervall aller beteiligten Reihen bleiben. Andernfalls gelten die Rechenregeln nicht mehr. Es seien

$$\begin{aligned} f:\ K_f &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} g:\ K_g &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \end{aligned}$$

gegeben. Auf $K := K_f \cap K_g$ gilt dann für beliebige $\alpha\,,\ \beta \in \mathbb{R}$
Summe:

$$\alpha\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right) + \beta\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) x^k\,.$$

Produkt:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k\,, \quad c_k = \sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l}$$

Quotient:

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\,, \quad c_n = \frac{1}{b_0}\left(a_n - \sum_{j=1}^{n} b_j c_{n-j}\right)$$

Die Summe von Potenzreihen ist auf dem gemeinsamen Konvergenzintervall wieder konvergent.

Beispiel 93 Summe von Potenzreihen

Für $|x| < 1$ betrachten wir die Funktionen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{und} \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}\,.$$

Summieren wir die Summendarstellung, so erhalten wir

$$f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (1 + (-1)^n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2\,x^{2\,n}$$

Andersherum erhalten wir

$$f(x) + g(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} = \frac{2}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} 2\,x^{2n}$$

Beispiel 94 Produkt von Potenzreihen

Wir betrachten wieder die Funktion f, g aus Beispiel 93:

$$\begin{aligned}
f(x) \cdot g(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{n} 1^l (-1)^{n-l} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(-1)^n + (-1)^{n-1} + \cdots + (-1)^1 + (-1)^0}_{(n+1)\ \text{Terme}} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ 1 & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}
\end{aligned}$$

Andererseits gilt:

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$$

Die Darstellung $\frac{1}{1-x}$ zur Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ auf $(-1,1)$ jeißt *geschlossene Darstellung* der Potenzreihe. Wenn eine Potenzreihe eine geschlossene Darstellung haben kann liegt die Frage nahe, ob eine geschlossene Darstellung vielleicht durch verschiedene Potenzreihen beschrieben werden kann. Die Antwort ist "Nein", kann sie nicht. Die Potenzreihendarstellung einer Funktion ist eindeutig bestimmt. Wann immer wir zwei Potenzreihen finden, die ein und dieselbe Funktion darstellen so müssen diese gleich sein. Sie sind dann sogar gliedweise gleich, was durch Koeffizientenvergleich leicht einsehbar ist.

Die Quotientenbildung aus Potenzreihen ist nicht auf den ersten Blick ersichtlich, aber dennoch leicht nachvollziehbar. Wir betrachten die Reihen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\,, \quad h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\,,$$

wobei $f(x)$ und $g(x)$ Reihen mit gegebenen Koeffizienten a_n und b_n sind und $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Wir stellen den Quotienten um zu $f(x) = h(x) \cdot g(x)$:

$$\begin{aligned}
& & f(x) &= h(x) \cdot g(x) \\
\Leftrightarrow & & \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) \\
& & &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} c_k b_{n-k} x^n \\
\Leftrightarrow & & \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n - \sum_{k=0}^{n} c_k b_{n-k}\right) x^n &= 0
\end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{aligned}
b_0 c_0 &= a_0 & &\Rightarrow & c_0 &= \frac{a_0}{b_0} \\
b_0 c_1 + b_1 c_0 &= a_1 & &\Rightarrow & c_1 &= \frac{1}{b_0}(a_1 - b_1 c_0) \\
b_0 c_2 + b_1 c_2 + b_2 c_0 &= a_2 & &\Rightarrow & c_2 &= \frac{1}{b_0}(a_2 - (b_1 c_1 + b_2 c_0)) \\
&\vdots & & & &\vdots \\
\sum_{k=0}^{l} c_k b_{n-k} &= a_l & &\Rightarrow & c_l &= \frac{1}{b_0}\left(a_l - \sum_{j=1}^{l} b_j c_{l-j}\right)
\end{aligned}$$

Damit gilt:

$$h(x) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b_0} \left(a_n - \sum_{j=1}^{n} b_j c_{n-j} \right) x^n$$

Beispiel 95 Quotient von Potenzreihen

Wieder unsere Funktionen aus Beispiel 93 und 94:

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Es ist $a_n = 1$ und $b_n = (-1)^n$. Gehen wir schrittweise voran:

$$\begin{aligned}
c_0 &= 1 & & \\
c_1 - c_0 &= 1 & \Rightarrow \quad & c_1 = 2 \\
c_2 - c_1 + c_0 &= 1 & \Rightarrow \quad & c_2 = 2 \\
c_3 - c_2 + c_1 - c_0 &= 1 & \Rightarrow \quad & c_3 = 2 \\
&\vdots & & \\
& & & c_n = 2
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} x^n = 2 \sum_{n=0}^{\infty} x^n - 1$$

Hm. Und wie sieht's mit Konvergenz aus? Das Quotientenkriterium liefert

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1\,,$$

was bedeutet, dass es keine Aussage bezüglich der Konvergenz zulässt. Der Nachteil bei der Quotientenbildung ist der, dass wir keinerlei Konvergenzeigenschaften für den Quotienten aus Potenzreihen von dem jeweiligen Dividenten und Divisor übernehmen kann. Worauf wir uns verlassen können ist folgendes:

Die Quotientenreihe zweier Potenzreihen mit gemeinsamen Konvergenzintervall K konvergiert unter Umständen nur auf einem sehr kleinen Intervall $(-\delta, \delta) \subseteq K$

Beispiel 96 Fortsetzung Beispiel 95

Berechnen wir noch eben, um sicher zu gehen, den Quotienten aus den darstellenden Funktionen zu den Potenzreihen, deren Quotienten wir in Beispiel 95 berechnet haben:

$$
\begin{aligned}
\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{1-x}(1+x) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} x^n(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n - 1 \\
&= 2\sum_{n=0}^{\infty} x^n - 1 \qquad \checkmark
\end{aligned}
$$

Begriffe wie *Wurzelkriterium*, *konvergente Majorante* und *absolute Konvergenz* wurden in allen Kapiteln, die Reihen behandeln aus zeitlichen Gründen unterschlagen. Sie können diese in den einschlägigen Literaturen nachschlagen[11]. Das Wurzel– und Majorantenkriterium sind zwei weitere Mittel, um Reihen auf Konvergenz zu überprüfen. Bei der Konvergenz von Reihen unterscheiden wir dann noch zwischen Konvergenz und absoluter Konvergenz.

Da wir uns nun so viel Mühe gegeben haben, um hier und da etwaig kompliziert aussehende Funktionen als einfach zu behandelnde Potenzreihen darzustellen, erwarten wir natürlicherweise, dass das Differentiations– und Integrations–'handling' bestechend einfach ist. Und wir werden nicht enttäuscht werden:

Satz 110: Ableitung und Integration von Potenzreihen:
Ableitung:

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n\, a_n x^{n-1}$$

Integration:

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + C$$

Jede Summenfunktion $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ist in ihrem Konvergenzintervall differenzierbar und integrierbar. Sowohl die Ableitung als auch die Stammfunktion sind ebenfalls Summenfunktionen und besitzen den gleichen Konvergenzbereich. Demzufolge ist jede Summenfunktion unendlich oft differenzierbar. Wir schreiben auch $f(x) \in C^{\infty}(K)$ und nennen $f(x)$ eine *glatte* Funktion.

[11] Ich empfehle zum Beispiel gerne **?**. Ein sehr angenehm zu lesendes Buch, aus dem ich einiges zum Thema Reihen direkt übernommen habe. Danke Micha!

Beispiel 97 Ableitung von Potenzreihen

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx} f(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2} \\
&= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{n} a_l b_{n-l} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(1+1+\cdots+1)}_{(n+1)\text{ mal}} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} \\
&= \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n
\end{aligned}
$$

Beispiel 98 Integration von Potenzreihen

Es ist einerseits

$$\int \frac{1}{1-x}\, dx = -\ln(1-x) + C$$

und andererseits

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} x^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} + \tilde{C}\,.$$

Demzufolge gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} + \tilde{C} = -\ln(1-x) + C\,.$$

Da die Konstanten C und $\tilde{C}$ für alle $x \in K$ gleich sein müssen, sonst wären es ja keine Konstanten!, betrachten wir die Beziehung für, sagen wir, $x = 0$:

$$0 + \tilde{C} = 0 + C\,.$$

Daraus ergibt sich folgelogisch die Reihe mit Darstellung

$$-\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}\,.$$

8.2 Taylorreihe: Funktionen “ertasten”

Motivation:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Das formulieren wir ein wenig um und erhalten

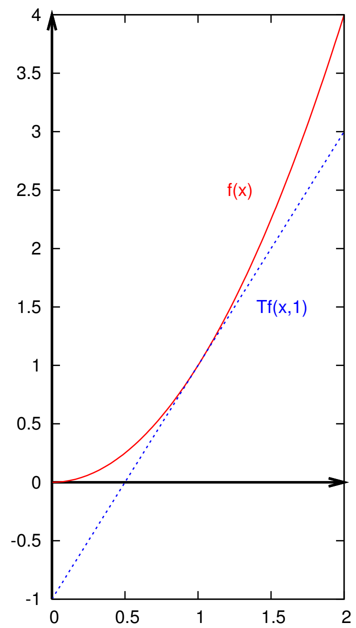
$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Rechter Hand steht die Tangentengerade, die im Punkt x_0 den gleichen Funktions– und Steigungswert hat, wie die Funktion f. Gut. Soweit kennen wir das ja schon, aber betrachten wir dennoch ein Beispiel, denn Wiederholung ist die Mutter des Studiums ...

Beispiel 99 Tangentengerade

$$f(x) = x^2\,,\; x_0 = 1$$
$$T_f(x,1) = 2\,x - 1$$

Im Bereich $(1,1)$ ist die Tangentengerade T_f eine gute Approximation an den Grafen f. Je weiter wir uns von dem Berührungspunkt entfernen, desto schlechter wird die Approximationsgüte.



Kann man das noch besser machen? Manchmal ja. Nehmen wir doch noch die zweite Ableitung dazu, so dass auch $f''(x_0) = T_f''(x_0)$ erfüllt ist. Das erreichen wir mit folgendem Polynom:

$$f(x) \approx T_{f,2}(x, x_0) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2$$

Nehmen wir einmal für f die Funktion aus Beispiel 99. Die beste Approximation an eine quadratische Funktion durch eine quadratische Funktion sollte die Funktion selbst sein. Mal sehen.

$$f(1) = 1\,,\quad f'(1) = 2\,,\quad f''(1) = 2$$
$$\Rightarrow \qquad T_{f,2}(x,1) = 1 + 2(x-1) + (x-1)^2 = x^2 \qquad \checkmark$$

Dies kann man sukzessive weiterführen solange f genügend oft differenzierbar ist.

Definition 111: Taylorpolynom, Taylorreihe und Restglied:
Es sei f eine $(n+1)$–mal stetig Differenzierbare Funktion. Dann heißt

$$T_{f,n}(x,x_0) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

das n–te *Taylorpolynom* von f an der Stelle x_0.

Es sei f beliebig oft in x_0 differenzierbar. Dann heißt die Potenzreihe

$$T_f(x,x_0) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_{f,n}(x,x_0)$$

Taylorreihe von f an der Stelle x_0. Das Restglied $R_{f,n}$ hat die Darstellung

$$R_{f,n}(x,x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

mit einem $\eta \in [\min(x_0,x), \max(x_0,x)]$.

Die Taylorreihe T_f ist zwar eine über die Ableitungen von f erzeugte Potenzreihe aber selbst in ihrem Konvergenzbereich muss sie noch lange nicht die Funktion f selbst darstellen.

Nicht einmal eine gute Approximation können wir generell erwarten:

Beispiel 100 Misserfolg

Nehmen wir einmal als Beispiel die glatte, also unendlich oft differenzierbare Funktion

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} .$$

Für eine Taylorentwicklung mit Mittelpunkt 0 benötigen wir alle Ableitungen an diesem Punkt:

$$f(0) = \lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$
$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\right)' = \lim_{x\to 0} \frac{2}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$
$$f''(0) = \lim_{x\to 0} \left(-\frac{6}{x^4} + \frac{4}{x^6}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(0) = 0$$

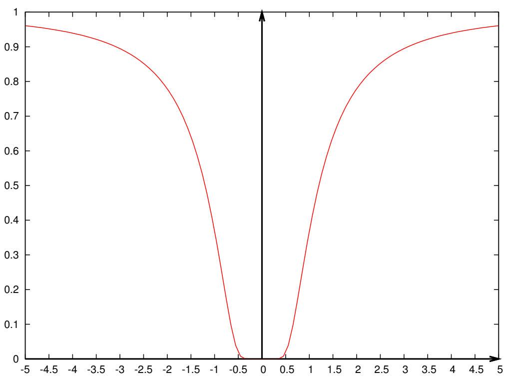


Abbildung 36: Graf von $\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$.

Die Potenzreihe stellt die konstante Nullfunktion dar und nicht f: $T_f(x,0) = 0 \neq f(x)$!!!

Wie also können wir sicherstellen, dass eine Taylorreihe die Funktion genau wiedergibt? Dazu müssen wir, was jetzt erst mal leicht gesagt ist, überprüfen, ob das Restglied eine Nullfolge ist, denn das Restglied

$$R_{f,n}(x,x_0) = f(x) - T_{f,n}(x,x_0)$$

beschreibt den Fehler zwischen der Funktion und dem zugehörigen Taylorpolynom. Das Problem ist, dass wir jede beliebige $(n+1)$–te Ableitung der Funktion f an der Stelle η kennen müssen. Wir erinnern uns daran, dass wir Taylorentwicklungen vorzugsweise von kompliziert dargestellten Funktionen erstellen wollen und selbst wenn wir alle Ableitungen in Abhängigkeit von n beschreiben könnten, so wüssten wir immer noch nicht an welcher Stelle η diese dann auszuwerten ist. Das ist doof. Aber es bleibt uns in dieser Situation eine Chance. Sind wir in der Lage eine obere Schranke $M \geq \max_{y\in(x,x_0)} \left|f^{(n+1)}(y)\right|$ für die $(n+1)$–te Ableitung von f über dem Intervall (x,x_0) anzugeben so gilt

$$|R_{f,n}(x,x_0)| = \frac{1}{(n+1)!}\left|f^{(n+1)}(\eta)\right| |x-x_0|^{n+1} \leq \frac{M\delta^{n+1}}{(n+1)!}$$

mit $\delta = |x - x_0|$. Damit erhalten wir eine qualitative Aussage über die Approximationsgüte.

Wenn wir eine Funktion über ihre Taylorreihe darstellen wollen, so müssen wir zunächst den Konvergenzbereich der entsprechenden Potenzreihe feststellen. Dort und nur dort kann eine Funktion durch eine Potenzreihe beschrieben werden und das auch nur, wenn das Restglied eine Nullfolge darstellt. Andernfalls erhalten wir durch die Restgliedabschätzung eine Fehlerschranke und eine entsprechend gute Approximation an f durch das zugehörige Taylorpolynom.

Beispiel 101 Sinus als Taylorreihe Wie lautet die n–te Ableitung der Sinusfunktion bei $x = 0$?

$$\begin{aligned}
\sin^{(1)}(0) &= \cos(0) = 1 & \sin^{(2)}(0) &= -\sin(0) = 0\\
\sin^{(3)}(0) &= -\cos(0) = -1 & \sin^{(4)}(0) &= \sin(0) = 0\\
\sin^{(5)}(0) &= \cos(0) = 1 & \sin^{(6)}(0) &= -\sin(0) = 0\\
\sin^{(7)}(0) &= -\cos(0) = -1 & \sin^{(8)}(0) &= \sin(0) = 0\\
&\vdots\\
\sin^{(4n-3)}(0) &= 1 & \sin^{(4n)}(0) &= 0\\
\sin^{(4n-1)}(0) &= -1 & \sin^{(4n-2)}(0) &= 0\\
&\vdots\\
\sin^{(2n+1)}(0) &= (-1)^n & \sin^{(2n)}(0) &= 0
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Taylorreihe (siehe Abbildung 37)

$$T_{\sin}(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2\,n+1)!} x^{2\,n+1}$$

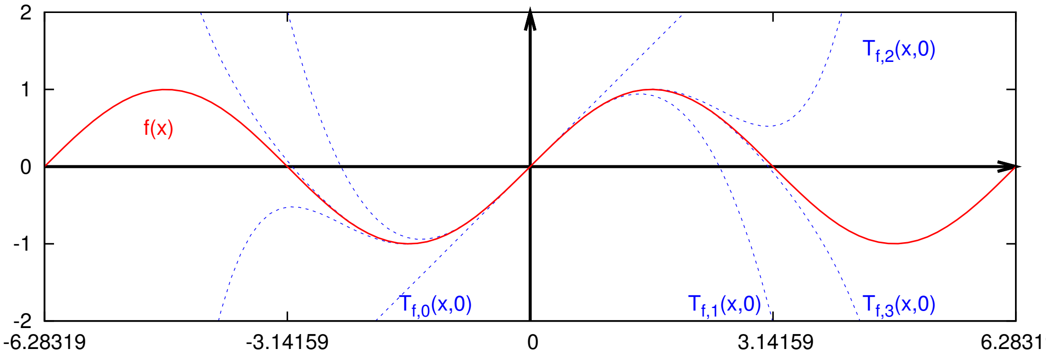


Abbildung 37: Taylorpolynome für $n = 0, 1, 2, 3$, $x_0 = 0$ und $f(x) = \sin x$

Schauen wir nach dem Konvergenzradius:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(-1)^{n+1}}{(2\,(n+1)+1)!} \cdot \frac{(2\,n+1)!}{(-1)^n} = \frac{(2\,n+1)!}{(2\,n+3)!} \\ &= \frac{-1}{(2\,n+2)(2\,n+3)} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} = 0 \\ \Rightarrow \qquad \rho &= \infty \end{aligned}$$

Die Reihe konvergiert also auf ganz $\mathbb{R}$.

Literatur

Bronstein, I. *Taschenbuch der Mathematik* (Verlag Harri Deutsch, 2008[7]).

Heuser, H. *Lehrbuch der Analysis*, Band 1 (B.G. Teubner Stuttgart, 1991[9]).