A Gesammelte Rechenregeln

A.1 Grundlagen

Mengen: Eine *Menge* ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Objekte einer Menge heißen *Elemente*.

Mengenschreibweisen:

	Schreibweise	Definition	Sprechweise
	$x \in M$		x ist Element von M
	$x \notin M$		x ist nicht Element von M
	$\{x \mid x \text{ hat die Eigenschaft } E\}$		Menge aller x mit der Eigenschaft E.
	$\emptyset$	$:= \{\}$	leere Menge
	$N \subseteq M$		N ist Teilmenge von M
	$N \subset M$		N ist echte Teil–menge von M
Existenz–operator:	$\exists\, x$		es existiert ein x
	$\exists!\, x$		es exist. genau ein x
Generalisierungs–quantor:	$\forall$		für alle
	$\vee$		logisches ODER
	$\wedge$		logisches UND
Durchschnitt:	$M \cap N$	$:= \{x \in M \mid x \in N\}$	M geschnitten N
Vereinigung:	$M \cup N$	$:= \{x \mid (x \in M) \vee (x \in N)\}$	M vereinigt N
Differenz:	$M \setminus N$	$:= \{x \in M \mid x \notin N\}$	M ohne N
Komplement:	$M^{\complement}$	$:= \{x \mid x \notin M\}$	Komplement von M
Produktmengen:			
	$M \times N$	$:= \{(a, b) \mid (a \in M) \wedge (b \in N)\}$	
	$M_1 \times \cdots \times M_n$	$:= \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in M_i, i = 1, \ldots, n\}$	

Zahlmengen

Name	Schreibweise	Definition
natürliche Zahlen:	$\mathbb{N}$	$:= \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$
mit der Null:	$\mathbb{N}_0$	$:= \mathbb{N} \cup \{0\}$
ganze Zahlen:	$\mathbb{Z}$	$:= \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
rationale Zahlen:	$\mathbb{Q}$	$:= \left\{\frac{m}{n} \;:\; m, n \in \mathbb{Z} \wedge n \neq 0\right\}$
reelle Zahlen:	$\mathbb{R}$	:= alle Zahlen auf der Zahlengeraden
irrationale Zahlen:	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$	:= alle Zahlen aus $\mathbb{R}$, die nicht rational sind

Intervalle

Schreibweise	Definition	Beschreibung
$[a,b]$	$:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \subset \mathbb{R}$	abgeschlossenes Intervall
(a,b)	$:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \subseteq \mathbb{R}$	offenes Intervall
$[a,b)$	$:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \subset \mathbb{R}$	(halb–)offenes Intervall
$(a,b]$	$:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \subset \mathbb{R}$	(halb–)offenes Intervall

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $-\infty < a, b < \infty$.

$\cancel{[a,\infty]}$ sondern immer $[a,\infty)$

genauso:

$\cancel{[-\infty,b]}$ sondern immer $(-\infty,b]$

komplexe Zahlen

Name	Schreibweise	Definition
komplexe Zahl:	c	$:= a + i \cdot b$
konjugiert komplexe Zahl:	$\overline{c}$	$:= \overline{a + i \cdot b} = a - i \cdot b$
Realteil von c:	$\mathrm{Re}(c)$	$:= a$
Imaginärteil von c:	$\mathrm{Im}(c)$	$:= b$

Rechenregeln fürkomplexe Zahlen

Addition:	$(a+i\cdot b)+(c+i\cdot d)$	$= (a+c)+i\cdot(b+d)$
Subtraktion:	$(a+i\cdot b)-(c+i\cdot d)$	$= (a-c)+i\cdot(b-d)$
Multiplikation:	$(a+i\cdot b)\cdot(c+i\cdot d)$	$= ac-db+i\cdot(bc+ad)$
Division:	$\frac{1}{a+i\cdot b}$	$= \frac{a}{a^2+b^2} - i\cdot\frac{b}{a^2+b^2}$

weitere Zahlmengen:

Name	Schreibweise	Definition
positive reelle Zahlen:	$\mathbb{R}^+$	$:= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
nicht negative reelle Zahlen:	$\mathbb{R}_0^+$	$:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
negative reelle Zahlen:	$\mathbb{R}^-$	$:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$
nicht positive reelle Zahlen:	$\mathbb{R}_0^-$	$:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$
komplexe Zahlen:	$\mathbb{C}$	$:= \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R} \wedge i^2 = -1\}$

Rechnen mit Potenzen: Seien $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}_0^+$ und $n\,,\ m \in \mathbb{N}^+$

ganzer Exponenten:

$$\begin{aligned} a^0 &:= 1 \qquad (a \neq 0) \\ a^{n+1} &:= a \cdot a^n \end{aligned}$$

rationaler Exponent:

$$\sqrt[n]{b} := b^{\frac{1}{n}}$$

Rechenregeln

$$\begin{aligned} a^{-n} &= \tfrac{1}{a^n} = \left(\tfrac{1}{a}\right)^n \\ a^{n+m} &= a^n a^m \\ (a^n)^m &= a^{n\,m} \\ a^{n^m} &= a^{(n^m)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{b^m} &= (b^m)^{\frac{1}{m}} = b^{\frac{m}{n}} \\ &= \left(b^{\frac{1}{n}}\right)^m = \sqrt[n]{b}^m \\ b^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{m}} &= b^{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}} = b^{\frac{m+n}{nm}} \\ &= \sqrt[nm]{b^{m+n}} \\ \left(b^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{m}}\right) &= b^{\frac{1}{n}} \left(1 + b^{\frac{1}{m}-\frac{1}{n}}\right) \end{aligned}$$

Bemerkungen

Für $n \neq 0$ ist $0^n = 0$. Während 0^0 ein unbestimmter Ausdruck ist.

Aussage:
Eine *Aussage* ist ein sinnvolles sprachliches Gebilde, das entweder wahr oder falsch ist.

Verknüpfungen von Aussagen

	Schreibweise	Sprechweise
Negation:	$\neg A$	nicht A
Konjunktion:	$A \wedge B$	A und B
Alternative:	$A \vee B$	A oder B
Implikation:	$A \Rightarrow B$	aus A folgt B
Äquivalenz:	$A \Leftrightarrow B$	A ist äquivalent zu B

Aussage verknüpfter Aussagen

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
W	W	F	W	W	W	W
W	F	F	F	W	F	F
F	F	W	F	F	W	W
F	W	W	F	W	W	F

Beweismethoden

1. direkter Beweis
2. indirekter Beweis
3. vollständige Induktion

Vollständige Induktion: $\forall n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ ist eine Aussage über $n \in \mathbb{N}$. Wenn gilt:

$A(1)$	ist wahr und	*(Induktionsvoraussetzung)*
$A(k) \Rightarrow A(k+1)$	ist wahr,	*(Induktionsschritt)*

dann gilt: $\forall n \in \mathbb{N} \ : \ A(n)$ ist eine wahre Aussage.

Struktur der vollständigen Induktion:

Aussage:

Voraussetzungen

Behauptung: $A(n)$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

Beweis: (vollständige Induktion)

Induktionsanfang: Prüfe $A(1)$!

Induktionsannahme: Gelte $A(k)$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt: Zeige: $A(k) \Rightarrow A(k+1)$

Das Summenzeichen: Für $m, n, k \in \mathbb{Z}$, $a_k \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n \qquad \text{für } m \leq n$$

Sprich: "Summe der a_k von k gleich m bis n". Ist $k > m$ so definieren wir

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := 0 \qquad \text{für } m > n\,.$$

Rechenregeln: Sei stets $m \leq n$. Dann gilt:

Summe/Differenz:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k \pm \sum_{k=m}^{n} b_k = \sum_{k=m}^{n} (a_k \pm b_k)$$

Produkt mit einem Skalar ($c \in \mathbb{R}$):

$$\sum_{k=m}^{n} c\, a_k = c \sum_{k=m}^{n} a_k$$

Indexverschiebung:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m+p}^{n+p} a_{k-p} = \sum_{k=m-p}^{n-p} a_{k+p}$$

Teleskopsummen:

$$\sum_{k=m}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_{m-1}$$

Das Produktzeichen: Für $m, n \in \mathbb{Z}$, $a_k \in \mathbb{R}$

$$\prod_{k=m}^{n} a_k := a_m \cdot a_{m+1} \cdots a_n \qquad \text{für } m \leq n$$

Sprich: "Das Produkt über die a_k von k gleich m bis n". Auch hier erklären wir die Situation

$$\prod_{k=m}^{n} a_k := 1 \qquad \text{für } m > n\,.$$

Indexverschiebung:

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = \prod_{k=m-p}^{n-p} a_{k+p}$$

Teleskopprodukt:

$$\prod_{k=m}^{n} \frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{a_n}{a_{m-1}}$$

Das Pascalsche Dreieck:

n											
0						1					
1					1		1				
2				1		2		1			
3			1		3		3		1		
4		1		4		6		4		1	
5	1		5		10		10		5		1
$\vdots$											

Fakulät: Sei $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} n! &:= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = \textstyle\prod_{j=1}^{n} j \\ 0! &:= 1 \end{aligned}$$

Binomialkoeffizient: Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$ und $n \geq k$. Dann definieren wir die Binomialkoeffizienten wie folgt:

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Binomische Formel: Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \,.$$

A.2 Folgen und Reihen

Folgen:

$$\begin{array}{ll} & a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \quad (n \in \mathbb{N} \text{ und } a_n \in \mathbb{R}) \\ \text{oder} & (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ \text{oder auch kurz} & \langle a_n \rangle \end{array}$$

Die Zahlen a_n heißen *Glieder* der Folge.

Darstellung von Folgen:

Darstellungsart	Beispiel
explizit	$a_n = 2\,n - 1$
implizit (auch rekursiv)	$a_1 = 1$ $a_{n+1} = a_n + 2$
aufzählend	$1, 3, 5, 7, 9, \ldots$

spezielle Folgen:
Arithmetische Folgen: Je zwei aufeinanderfolgende Folgenglieder unterscheiden sich durch einen konstanten Wert:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + c \\ &= a_{n-1} + 2c \\ &\vdots \\ &= a_1 + n\,c \end{aligned}$$

Grenzwert: Eine Zahl a heißt *Grenzwert* der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\Leftrightarrow$

$$\forall\,\epsilon > 0\,\exists\,n_0 \in \mathbb{N}\,\forall\,n \geq n_0 : \ |a_n - a| < \epsilon\,.$$

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *konvergent*, wenn sie einen Grenzwert besitzt. Schreibweise:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

Andernfalls nennen wir sie *divergent*.

Rechenregeln für konvergente (!) Folgen: Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen, so gilt

- $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und
$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n\,.$$
- $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und
$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n\,.$$
- Ist $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$ so gibt es ein n_0, so dass $b_n \neq 0$ für $n \geq n_0$. Dann gilt $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}\,.$$

Eigenschaften von Folgen: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge.

1. **Monotonie:** Eine Folge ist monoton wachsen (fallend):$\Leftrightarrow$
$$a_n \geq a_{n-1} \quad (a_n \leq a_{n-1}) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$
($\neq$ für strenge Monotonie)
2. **Beschränkheit:** Eine Folge ist nach oben (unten) beschränkt: $\Leftrightarrow$
$$\exists\,c \in \mathbb{R} : \ a_n \leq c \quad (a_n \geq c) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$
3. **Monotoniekriterium:** Ist eine Folge monoton wachsend (fallend) und nach oben (unten) beschränkt so ist sie konvergent und besitzt genau einen Grenzwert.

Die Eulersche Zahl: Die *Eulersche Zahl* e ist definiert als

$$\mathrm{e} := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n .$$

Eine andere Darstllung der Eulerschen Zahl ist gegeben durch

$$\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} .$$

(unendliche) Reihe: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Die Folge

$$b_k := \sum_{n=0}^{k} a_n$$

der *Partialsummen* heißt *(unendliche) Reihe* und wird mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

bezeichnet.
Konvergiert die Folge $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$, so wird ihr Grenzwert ebenfalls mit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ bezeichnet.
Die spezielle Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$$

heißt *alternierende Reihe*.

Konvergenzkriterien für Reihen:
Ein notwendiges (aber nicht hinreichendes) Kriterium zur Konvergenz einer Reihe $\left(\sum_{n=0}^{k} a_n\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ist, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Sind alle Folgenglieder $a_n \geq 0$ so konvergiert die Reihe $\left(\sum_{n=0}^{k} a_n\right)_{k\in\mathbb{N}}$ wenn sie beschränkt ist. (Das Analoge gilt für nicht positive Folgenglieder.)

Quotientenkriterium: Sei $a_k \neq 0$ für alle $k \geq k_0$. Es gebe eine reelle Zahl $\theta \in (0,1)$, so dass

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq \theta\,, \quad \forall k \geq k_0\,.$$

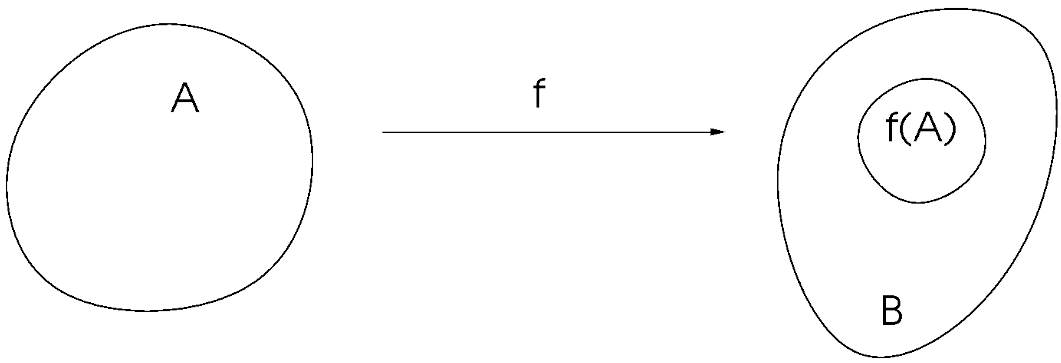
Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. (Ist der Grenzwert des Quotienten größer als eins so divergiert die Reihe. In allen anderen Fällen gibt es keine Aussage.)

Leibnizkriterium (für alternierende Reihen): Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge nicht negativer Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$.

A.3 Funktionen

Funktionen: Seien A, B Mengen. Eine *Funktion* oder *Abbildung* von A nach B ist eine Teilmenge f der Produktmenge $A \times B$ derart, dass zu jedem $x \in A$ genau ein $y \in B$ existiert mit $(x, y) \in f$.
Statt $(x, y) \in f$ schreibt man auch $y = f(x)$ oder

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\mapsto y\,. \end{aligned}$$



Schreibweise	Definition/Sprechweise

$y = f(x)$	heißt *Funktionswert von f an der Stelle x*.
A	heißt *Definitionsbereich von f* (auch $\mathbb{D}_f$).
B	heißt *Wertebereich* von f.
Für $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$	heißt
$f(A')$	$:= \{y \in B \mid \exists x \in A' \text{ mit } y = f(x)\}$
	Bild (–menge) von A'(unter f).
$f^{-1}(B')$	$:= \{x \in A \mid f(x) \in B'\}$
	Urbild (–menge) von B'(unter f).

Gleichheit von Funktionen: Zwei Funktionen $f : A \to B$ und $g : C \to D$ sind gleich, genau dann wenn sowohl die Abbildungsvorschriften von f und g gleich sind und jeweils Definitions– und Bildbereiche übereinstimmen. Das heißt:

$$(f = g) :\Leftrightarrow \begin{cases} A = C\,, & \\ B = D & \text{und} \\ f(x) = g(x) & \forall x \in A\,. \end{cases}$$

Man sagt auch die Funktionen sind *identisch gleich*: $f \equiv g$

Definitionsbereich/Wertebereich:
Ist der Definitionsbereich einer Funktion nicht angegeben, ist verabredungsgemäß der größtmögliche Definitionsbereich in $\mathbb{R}$ gemeint.
Ist der Wertebereich einer Funktion nicht angegeben, ist verabredungsgemäß die Bildmenge $f(\mathbb{D}_f)$ des Definitionsbereichs gemeint.

Monotonie von Funktionen: Wir nennen eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf $[a, b]$ *monoton wachsend (monoton fallend)*, falls

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b]\; x_1 < x_2 \;:\; f(x_1) \leq (\geq) f(x_2)$$

gilt. f heißt *streng monoton wachsend (streng monoton fallend)*, falls

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b]\; x_1 < x_2 \;:\; f(x_1) < (>) f(x_2)\,.$$

gilt. Wir nennen f streng monoton, wenn f entweder streng monoton wachsend (smw) oder streng monoton fallend (smf) ist.

Injektiv, Surjektiv & Bijektiv: Es seien A, B Mengen. Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt

surjektiv	:⇔	$f(A) = B$	(f bildet A auf B ab)
injektiv	:⇔	$\forall x_1 \neq x_2 \;:\; f(x_1) \neq f(x_2)$	(f ist eineindeutig)
bijektiv	:⇔	f ist surjektiv und injektiv	(f bildet eineindeutig A auf B ab)

Komposition/Verkettung von Funktionen: Durch $f : I \to \mathbb{R}$ und $g : D \to \mathbb{R}$ mit $g(D) \subseteq I$

kann man die Komposition/Verkettung $f \circ g : D \to \mathbb{R}$ bilden. Sie ist definiert durch

$$(f \circ g)(x) := f(g(x)) \,.$$

Umkehrfunktion: Ist $f : A \to B$ bijektiv, dann gilt

$$\forall x \in A \, \exists! \, y \in B \;:\; f(x) = y \quad \wedge \quad \forall y \in B \, \exists! \, x \in A \;:\; f(x) = y$$

$\Rightarrow$

$$\exists \, f^{-1} : B \to A \text{ mit } f^{-1}(y) = x \text{ wenn } f(x) = y$$

$f^{-1} : B \to A$ ist ebenfalls bijektiv und

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$$

Die Verkettung von f und f^{-1} bildet die Identität. Hier gilt dann auch

$$(f^{-1} \circ f)(x) = (f \circ f^{-1})(x) = Id(x) = x$$

Kurvendiskussion: Eine Kurvendiskussion beinhaltet die Untersuchung aller Funktionsmerkmale, sofern diese vorhanden sind, so dass die Funktion skizziert werden kann. Zu den zu untersuchenden Komponenten gehören:

1. Definitionsbereich,
2. Nullstellen,
3. Unstetigkeitsstellen
   (a) Lücken
   (b) Pole und entsprechendes Verhalten der Funktion,
4. Asymptoten,
5. Verhalten gegen $\pm\infty$,
6. Extrema und die Untersuchung auf Maximum oder Minimum,
7. Wendepunkte.

Periodische Funktionen: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *periodisch mit Periode* p, falls

$$f(x) = f(x+p) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

gilt.

ϵ-δ-Definition der Stetigkeit:
Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt in $x_0 \in I$ stetig :$\Leftrightarrow$

$$\forall \epsilon > 0\, \exists\, \delta = \delta(\epsilon) > 0\, \forall x \in I \; : \; |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Anmerkung: $\delta(\epsilon)$ bedeutet, dass δ von ϵ abhängen darf.

A.4 Betragsfunktion

Betragsfunktion:

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls} \quad x \in \mathbb{R}_0^+ \\ -x & \text{falls} \quad x \in \mathbb{R}^- \end{cases}$$

Eine andere Möglichkeit, die Betragsfunktion zu beschreiben ist

$$|x| = \sqrt{x^2}\,.$$

Rechnen mit Ungleichungen: Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $c \geq 0$ und $d < 0$. Dann gilt

Addition und Subtraktion:

$$\begin{aligned} a &\leq b \\ \Leftrightarrow \quad a + c &\leq b + c \\ \Leftrightarrow \quad a - c &\leq b - c \end{aligned}$$

Multiplikation und Division:

$$\begin{aligned} a &\leq b \\ \Leftrightarrow \quad a \cdot c &\leq b \cdot c \\ \Leftrightarrow \quad \tfrac{a}{c} &\leq \tfrac{b}{c} \end{aligned}$$

ABER:

$$\begin{aligned} a &\leq b \\ \Leftrightarrow \quad a \cdot d &\geq b \cdot d \\ \Leftrightarrow \quad \tfrac{a}{d} &\geq \tfrac{b}{d} \end{aligned}$$

Und für $a, b \neq 0$:

$$\begin{aligned} a &\leq b \\ \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{a} &\geq \tfrac{1}{b} \end{aligned}$$

Die Situation ist analog für $a \geq b$.

A.5 Polynome

A.5.1 Nullstellen und konstruktion

Polynom: Für $i \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq i \leq n$ seien $a_i \in \mathbb{R}$ mit $a_n \neq 0$. Dann heißt

$$p(x) := \sum_{j=0}^{n} a_j x^j = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

(reelles) Polynom n–ten Grades.

Schreibweise	Sprechweise
$a_0, \ldots, a_n$	heißen Koeffizienten,
a_0	heißt absolutes Glied und
a_n	heißt Hauptkoeffizient des Polynoms

Nullstellen von Polynomen: Es sei p ein Polynom vom Grad n. x_0 heißt *Nullstelle von* p, falls

$$p(x_0) = 0$$

gilt. Es gibt dann ein Polynom g vom Grad $n-1$, so dass

$$p(x) = (x - x_0)g(x)\,.$$

Wir nennen den Ausdruck $(x - x_0)$ *Linearfaktor* von p.

Lösen der quadratischen Gleichung:

Die Lösungen x_1 und x_2 von

$$ax^2 + bx + c = 0$$

sind gegeben durch

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,,$$

sofern der Ausdruck unter der Summe nicht negativ ist. Es gilt folgendes:

1. Ist $b^2 - 4ac < 0$, so gibt es in $\mathbb{R}$ keine Lösung
2. Ist $b^2 - 4ac = 0$, so gibt es genau eine Lösung, nämlich $x_1 = \frac{-b}{2a}$
3. Ist $b^2 - 4ac > 0$, so gibt es genau zwei Lösungen, nämlich $x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ und $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Teiler: Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a \neq 0$, dann definieren wir

$$a|b :\Leftrightarrow \frac{b}{a} \in \mathbb{Z}$$

Wir sagen a ist ein *Teiler* von b.

Nullstellen von Polynomen mit ganzen Koeffizienten:
Es sei $p(x)$ ein Polynom vom Grad n mit ganzen Koeffizienten, das heißt $a_i \in \mathbb{Z}$ für $i = 0, \dots, n$. Dann gilt für eine Nullstelle x_0 von p

1. $$x_0 \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad x_0 | a_0$$

2. $$x_0 \in \mathbb{Q} \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{r}{s} \; : \; r | a_0 \wedge s | a_n$$

Horner–Schema:

	−1	5	−3	−9	+
x= 2		−2	6	6	
	−1	3	3	−3	=p(x)

$$\begin{aligned} p(x) &= -x^3 + 5x^2 - 3x - 9 \\ &= x(x(x(-1) + 5) - 3) - 9 \end{aligned}$$

$$p(2) = 2(2(2(-1) + 5) - 3) - 9$$

Zusammenfassung zu Nullstellen von Polynomen:

- $p \in \mathbb{P}_1$: Wir lösen die lineare Gleichung nach x auf.
- $p \in \mathbb{P}_2$: Mit der Mitternachtsformel aus Regel 37 bestimmen wir mögliche Nullstellen. Ist der Wert unter der Wurzel

  < 0 : so hat das Polynom keine reellen Nullstellen,

  $= 0$: so hat das Polynom eine reelle Nullstelle mit der Vielfachheit 2 und

  > 0 : so hat das Polynom zwei reelle Nullstellen.
- $p \in \mathbb{P}_n$ mit $n > 2$:
  - Hat das Polynom eine spezielle Form, die es erlaubt auf eine einfachere zurückzuführen, so tun wir das. Etwa $p(x) = x^4 + x^2 - 1$ ersetzen wir zunächst durch $p(y) = y^2 + y - 1$ gemäss $y = x^2$. Wir berechnen zunächst die Nullstellen (sofern in $\mathbb{R}$ vorhanden) von $p(y)$ und ermitteln dann (sofern in $\mathbb{R}$ möglich) aus $y = x^2$ die entsprechenden Werte für x.
  - Hat das Polynom keine spezielle Form, so gehen wir folgendermaßen vor:
    1. Wir setzen $k = 1$ und $p_k(x) = p(x)$
    2. Wir "raten" eine Nullstelle x_k von $p_k(x)$ unter Zuhilfenahme von Regel 39 und dem Horner–Schema (Regel 40) zur Arbeitserleichterung.
    3. Mittels Polynomdivision (siehe Beispiel 26) bestimmen wir das Polynom $p_{k+1}(x) = \frac{p_k(x)}{x-x_k}$.
    4. Solange wir Nullstellen finden können setzen wir an dieser Stelle $k = k+1$ und gehen zu 2.

gerade und ungerade Funktionen: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ symmetrisch zum Ursprung ($= (0,0)$), das heißt $\forall x \in D \mid -x \in D$.

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt

gerade	falls	$f(x) = f(-x)$
ungerade	falls	$f(x) = -f(-x)$

$\forall x \in D$.

Lagrange–Interpolation: Gegeben seien die n Punktepaare

$$(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\,.$$

Dann erfüllt das *Lagrange–Polynom* vom Grad $n-1$

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \in \mathbb{P}_{n-1}$$

die Bedingung

$$p(x_i) = y_i\,,$$

was bedeutet, dass es genau durch die angegebenen Punkte verläuft.

Eine Skizze eines Polynoms wird erstellt über die folgenden Informationen:

1. Nullstellen
2. asymptotisches Verhalten
3. Extrema
4. Wendepunkte

A.5.2 Ableitung

Ableitung von Polynomen:

$$p'(x) = \sum_{i=0}^{n} i\, a_i\, x^{i-1}$$

A.5.3 Stammfunktion

Stammfunktion (unbestimmtes Integral) eines Polynoms:

$$\int x^n\, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}\,, \qquad \text{für } n \geq 0$$

Weitere Stammfunktionen in diesem Kontext:
Negative Exponenten $n \neq 1$:

$$\int x^{-n}\,dx = \frac{1}{1-n}x^{1-n}$$

Rationale Exponenten $n = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \ \wedge\ q \neq 0 \ \wedge\ n \neq -1$:

$$\int x^{\frac{p}{q}}\,dx = \frac{q}{p+q}x^{\frac{p+q}{q}}$$

A.6 Exponential– und Logarithmusfunktion

Rechenregeln für Exponential– und Logarithmusfunktionen: Es seien $a, b > 0$:
Exponentialfunktion:

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y \qquad a^{-x} = \tfrac{1}{a^x} \qquad a^0 = 1$$

$$p \cdot a^x + q \cdot a^x = (p+q) \cdot a^x \qquad \tfrac{a^x}{b^x} = \left(\tfrac{a}{b}\right)^x \qquad (a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

Logarithmusfunktion:

$$\log_a(b^n) = n\log_a(b)$$
$$\log_a(bc) = \log_a(b) + \log_a(c)$$

Notation:

$$\log(b) := \log_{10}(b)$$
$$\ln(b) := \log_{\mathrm{e}}(b)$$

Basiswechsel:

$$\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}$$

Eigenschaften der e–Funktion:

- $\mathrm{e}^x > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$, das heißt e^x hat keine Nullstelle.
- e^x ist smw (also injektiv, umkehrbar)
- e^x wächst schneller als jede Potenz x^n.
- e^x ist gleich seiner eigenen Ableitung: $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$ und diese Eigenschaft hat Tragweite!!

Eigenschaften der $\ln$–Funktion:

- $\ln x$ ist nur für $x > 0$ definiert.
- $\ln(\mathrm{e}^x) = x \; \forall x \in \mathbb{R}$ und $\mathrm{e}^{\ln x} = x \; \forall x \in \mathbb{R}^+$
- $\ln x$ ist smw
- $\ln x$ wächst schwächer als jede noch so kleine Potenz $x^{\frac{1}{n}}$.
- $\ln x' = \frac{1}{x}$

A.7 Rationale Funktionen

(gebrochen) rationale Funktionen:
Der Quotient zweier Polynome $p(x)$ und $q(x) \neq 0$

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

heißt *(gebrochen) rationale Funktion*. Ist der Grad des Nennerpolynoms größer als der des Zählerpolynoms, so heißt f *echt gebrochen* ansonsten *unecht gebrochen*. (Siehe Abb. 27)

Es seien $p(x)$ und $q(x)$ Polynome mit $p(x) \in \mathbb{P}_k$ und $q(x) \in \mathbb{P}_l$. Eine rationale Funktion

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

läßt sich immer mittels Polynomdivision als Summe eines Polynoms und einer echt gebrochen rationalen Funktion

$$f(x) = g(x) + \frac{\bar{p}(x)}{\bar{q}(x)}$$

mit $\mathrm{Grad}(\bar{p}) < \mathrm{Grad}(\bar{q})$ schreiben, wobei

$g(x) = 0$	falls	$k < l$
$g(x) = c \neq 0$	falls	$k = l$
$\mathrm{Grad}(g) > 0$	falls	$k > l$, nämlich $\mathrm{Grad}(g) = k - l$.

$g(x) \in \mathbb{P}_0$ heißt *horizontale Asymptote*

$g(x) \in \mathbb{P}_1$ heißt *schiefe Asymptote*

$g(x) \in \mathbb{P}_{\geq 2}$ heißt *Näherungsfunktion*

Ist x_0 eine Polstelle von $f(x)$ so nennen wir die Gerade $x = x_0$ *vertikale Asymptote*

Ansatz der Partialbrüche:
Jede echt gebrochen rationale Funktion läßt sich als Summe von Partialbrüchen schreiben. Das sind echt gebrochen rationale Funktionen der Form:

(1) $\frac{c_1}{x-x_0}\,,\ \frac{c_2}{(x-x_0)^2}\,,\ \ldots\,,\ \frac{c_k}{(x-x_0)^k}$

(2) $\frac{a_1x+b_1}{x^2+px+q}\,,\ \frac{a_2x+b_2}{(x^2+px+q)^2}\,,\ \ldots\,,\ \frac{a_kx+b_k}{(x^2+px+q)^k}$

wobei der quadratische Ausdruck $(x^2 + px + q)$ keine reellen Nullstellen besitzt.

Zu jeder Potenz $(x - x_0)^k$ eines Linearfaktors im Nenner der echt gebrochen rationalen Funktion sind die k Partialbrüche der Form (1) mit unbestimmten Koeffizienten anzusetzen.

Zu jeder Potenz $(x^2+px+q)^k$ eines quadratischen Faktors ohne reelle Nullstellen sind die k Partialbrüche der Form (2) mit unbestimmten Koeffizienten anzusetzen. Alle Partialbrüche sind zu addieren.

Vorgehensweise: Für eine gebrochen rationale Funktion $f(x)$ gelte folgende Notation:

$f(x)$ echt gebrochen rational:	$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$
$f(x)$ unecht gebrochen rational:	$f(x) = g(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$

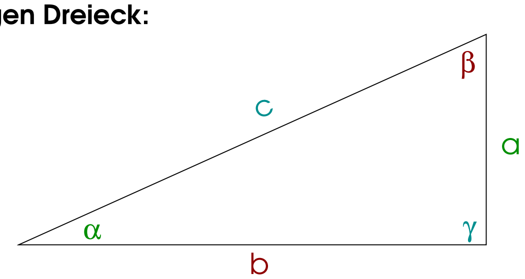
1. Falls $f(x)$ unecht gebrochen rational ist, so erzeugen wir per Polynomdivision einen echt gebrochen rationalen Anteil.
2. Wir suchen (reelle) Nullstellen von $q(x)$ und stellen $q(x)$ in linearen und falls nötig quadratischen Faktoren dar.
$$q(x) = (x + x_1)\cdots(x + x_k)^k \cdot (a_1x^2 + b_1x + c_1)\cdots(a_kx^2 + b_kx + c_k)^k$$
3. Wir machen den Ansatz der Partialbruchzerlegung .
4. Solange wie möglich berechnen wir die gesuchten Koeffizienten mit der Zuhaltemethode, andernfalls mit dem Koeffizientenvergleich.

A.8 Trigonometrische Funktionen ...

A.8.1 ... als solche

Trigonometrsiche Funktionen am rechtwinkligen Dreieck:

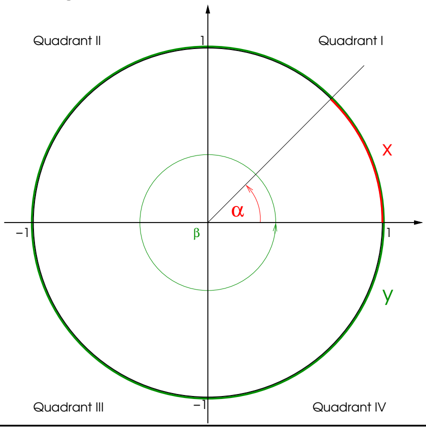
Zu einem rechtwinkligen Dreieck mit den Kathetenlängen a und b und der Hypothenusenlänge c, bezeichnen wir den Winkel gegenüber der Kante a mit α und definieren folgende Funktionen:



$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{b}{c}$$

Winkel und Bogenmaß: Das Bogenmaß x eines Winkels α ist die Länge des Kreisbogens, der dem Winkel α gegenüber liegt, wenn man ihn im Einheitskreis gegen den Uhrzeigersinn abträgt.



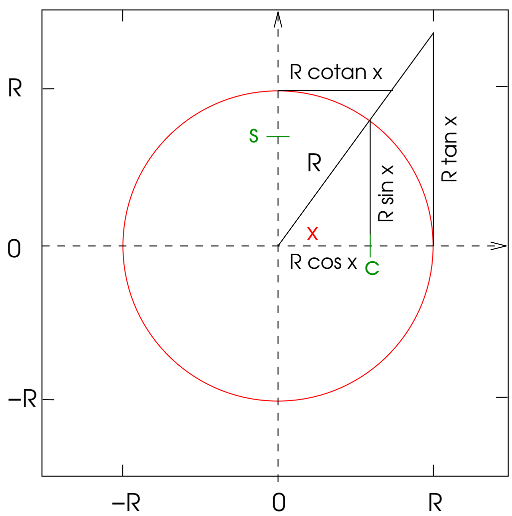
Umfang des Einheitskreises:

Winkel	β	$= 360°$
Bogenmaß	y	$= 2\pi$

Kreisabschnitt:

Winkel	α	
Bogenmaß	x	$= \frac{2\pi}{360°}\alpha$

Trigonometrsiche Funktionen am Kreis mit Radius R:



Es sei $(c, s) \in \mathbb{R}$ ein beliebiger Punkt auf dem Kreis $\partial B_R(0) \subset \mathbb{R}^2$ und x das zugehörige Bogenmaß. Dann gilt:

$$R \sin x = s$$

$$R \cos x = c$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{s}{c}, \qquad c \neq 0$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{c}{s}, \quad s \neq 0$$

Eigenschaften der Sinusfunktionen:
Der Sinus ist eine ungerade und der Kosinus eine gerade Funktion, das heißt es gilt

$$\sin(-x) = -\sin x \qquad \text{und} \qquad \cos(-x) = \cos x\,.$$

Die Sinusfunktionen sind periodisch und haben die Periode $2\,\pi$:

$$\sin(x) = \sin(x + 2\,\pi) \qquad \text{und} \qquad \cos(x) = \cos(x + 2\,\pi)$$

1. $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$
2. $\sin(k\,\pi) = 0$
3. $\sin((2k + \frac{1}{2})\pi) = 1$
4. $\sin((2k + \frac{3}{2})\pi) = -1$
5. $|\sin x| \leq |x|$
6. $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$
7. $\cos(2k\,\pi) = 1$
8. $\cos((2k + 1)\pi) = -1$
9. $\cos((k + \frac{1}{2})\pi) = 0$

Einige Sinus– und Kosinuswerte:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\cos x$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

Rechenregeln für Sinus und Kosinus: Es seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt

1. $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
2. $\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$
3. $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
4. $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$
5. $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$.
6. $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$.
7. $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$.
8. $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$.

1. und 3. sind die sogenannten *Additionstheoreme*.

Beziehungen zwischen Sinus und Kosinus:

1. $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$
2. $\sin(2\pi - x) = \sin(-x) = -\sin x.$
3. $\sin(\pi - x) = \sin x.$
4. $\sin(\pi + x) = -\sin x.$
5. $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = -\cos(\frac{\pi}{2} + x) = \sin x$
6. $\cos(2\pi - x) = \cos(-x) = \cos x.$
7. $\cos(\pi - x) = \cos(\pi + x) = -\cos x.$
8. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$

Arkusfunktionen: Die Abbildungen

$$\begin{array}{ll} \sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1] & \cos : [0, \pi] \to [-1, 1] \\ \tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R} & \cot : (0, \pi) \to \mathbb{R} \end{array}$$

sind bijektiv. Die Umkehrfunktionen der Trigonometrischen Funktionen heißen *Arkusfunktionen* und lauten

$$\begin{array}{ll} \arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \arccos : [-1, 1] \to [0, \pi] \\ \arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) & \operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to (0, \pi) \end{array}$$

A.8.2 Integration

Stammfunktionen von Trigonometrischen Funktionen:

9. $\int \sin x \, dx = -\cos x$
10. $\int \cos x \, dx = \sin x$
11. $\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x|$
12. $\int \cot x \, dx = \ln|\sin x|$
13. $\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$
14. $\int \arccos x \, dx = x \arccos x - \sqrt{1 - x^2}$
15. $\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$
16. $\int \operatorname{arccot} x \, dx = x \operatorname{arccot} x + \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$

A.8.3 Schwingung

(harmonische) Schwingung:
Einen Vorgang, den man durch eine periodische Funktion beschreiben kann heißt *Schwingung*.
Eine Schwingung, die sich durch eine Funktion $f(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(t) = A \sin(\omega\, t + \varphi)\,, \qquad \omega,\ \varphi,\ A \in \mathbb{R}$$

beschreiben läßt heißt *harmonisch*.

Notationen zur Sinuskurve: Es sei $f(t)$ eine zeitabhängige Funktion, die eine Schwingung beschreibt mit der Form

$$f(t) = A \sin(\omega\, t + \varphi)\,.$$

- A heißt *Amplitude* und beschreibt die größte Auslenkung von $f(t)$.
- $\omega\, t + \varphi$ heißt *Phase* und φ die *Nullphase* oder auch *Phasenverschiebung*.
- ω heißt *Schwingungs–* oder auch *Kreisfrequenz*.
- Die *Periode* beträgt $T = \frac{2\pi}{\omega}$ und
- die *Frequenz* ist gegeben durch $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$.

Überlagerung von Schwingungen:
Die *Überlagerung* zweier Schwingungen $f_1(t)$ und $f_2(t)$ ist punktweise definiert, das heißt ihre Auslenkungen addieren sich:

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t)$$

Die Überlagerung ist im Allgemeinen nicht mehr periodisch, es sei denn $f_1(t)$ und $f_2(t)$ besitzen die gleiche Periode.

Superposition: Das Aufaddieren von Schwingungen gleicher Frequenz

$$A \sin(\omega\, t + \varphi) = A_1 \sin(\omega\, t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega\, t + \varphi_2)$$

mit

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2\, A_1 A_2 (\cos(\varphi_1 - \varphi_2))} \qquad \tan\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}$$

Allgemein formuliert:

$$A \sin(\omega\, t + \varphi) = \sum_{i=1}^{n} A_i \sin(\omega\, t + \varphi_i)$$

(atan2) Winkel eines Punktes im $\mathbb{R}^2$ bezüglich der x–Achse erhalten wir durch die folgende Funktion

$$\operatorname{atan2}\left(\frac{y}{x}\right) := \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{für} \quad x > 0 & \text{(1. und 4. Quadrant)} \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{für} \quad x < 0 \wedge y \geq 0 & \text{(2. Quadrant)} \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{für} \quad x < 0 \wedge y < 0 & \text{(3. Quadrant)} \\ \frac{\pi}{2} & \text{für} \quad x = 0 \wedge y > 0 & \text{(positive } y\text{–Achse)} \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für} \quad x = 0 \wedge y < 0 & \text{(negative } y\text{–Achse)} \\ \text{nicht definiert} & \text{für} \quad x = 0 \wedge y = 0 & \text{(im Ursprung)} \end{cases}$$

Der Definitionsbereich ist

$$\mathbb{D}_{\operatorname{atan2}} = [-\pi, \pi]\,.$$

A.9 Potenzreihen

Potenzreihen: Eine *Potenzreihe* mit Mittelpunkt $x_0 \in \mathbb{R}$ ist eine Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

mit reeller Zahlenfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dem reellen Mittelpunkt x_0 und einer reellen Variablen x.

Konvergenzradius: Falls für fast alle Koeffizienten a_n einer Potenzreihe $a_n \neq 0$ gilt und der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ existiert, so ist der *Konvergenzradius* der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ durch

$$\rho = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$$

gegeben.

Eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ mit Konvergenzradius ρ ist für alle $x \in (x_0-\rho, x_0+\rho)$ konvergent und divergiert für $|x - x_0| > \rho$. Das Intervall $K = (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ heißt *Konvergenzintervall* der Potenzreihe.

Das Konvergenzverhalten an den beiden Randpunkten $x_0 \pm \rho$ muss separat untersucht werden. Dazu setzen Sie $x = x_0 \pm \rho$ und untersuchen die entstehende Reihe wie gewohnt auf Konvergenzkriterien.

Rechnen mir Potenzreihen: Beim Rechnen mit Potenzreihen müssen wir darauf achten, dass wir immer im Konvergenzintervall aller beteiligten Reihen bleiben. Andernfalls gelten die Rechenregeln nicht mehr. Es seien

$$\begin{aligned} f: K_f &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} g: K_g &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \end{aligned}$$

gegeben. Auf $K := K_f \cap K_g$ gilt dann für beliebige $\alpha\,,\ \beta \in \mathbb{R}$
Summe:

$$\alpha \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right) + \beta \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) x^k \,.$$

Produkt:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k\,, \quad c_k = \sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l}$$

Quotient:

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\,, \quad c_n = \frac{1}{b_0}\left(a_n - \sum_{j=1}^{n} b_j c_{n-j}\right)$$

Ableitung und Integration von Potenzreihen:
Ableitung:

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n\, a_n x^{n-1}$$

Integration:

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + C$$

Taylorpolynom, Taylorreihe und Restglied:
Es sei f eine $(n+1)$–mal stetig Differenzierbare Funktion. Dann heißt

$$T_{f,n}(x, x_0) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

das n–te *Taylorpolynom* von f an der Stelle x_0.

Es sei f beliebig oft in x_0 differenzierbar. Dann heißt die Potenzreihe

$$T_f(x, x_0) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_{f,n}(x, x_0)$$

Taylorreihe von f an der Stelle x_0. Das Restglied $R_{f,n}$ hat die Darstellung

$$R_{f,n}(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

mit einem $\eta \in [\min(x_0, x), \max(x_0, x)]$.

A.10 Grenzwerte

Grenzwert und Stetigkeit von Funktionen: Es sei f eine Funktion. Dann heißt c mit

$c = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$	*linksseitiger Grenzwert* von f für x gegen a
$d = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$	*rechtsseitiger Grenzwert* von f für x gegen a.
$c = d \quad\Rightarrow\quad c = \lim\limits_{x\to a} f(x)\,,$	*Grenzwert* von f für x gegen a, das heißt, dass der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert übereinstimmen: $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$

Für eine Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ sagen wir f *existiert* am Punkt a, wenn es einen Grenzwert gibt und

$$\lim_{x\to a} f(x) \neq \pm\infty$$

gilt.

$f : I \to \mathbb{R}$ heißt *stetig im Punkt* $x_0 \in I$, falls

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)\,.$$

- Falls x_0 ein Randpunkt von I ist, so ist der Grenzwert nur einseitig zu verstehen.
- Die Funktion f heißt *auf I stetig*, wenn sie in jedem Punkt $x_0 \in I$ stetig ist.

Rechenregeln für Grenzwerte:
Es seien f und g Funktionen, für die gilt

$$\lim_{x \to a} f(x) = c \quad \text{und} \quad \lim_{x \to a} g(x) = d$$

mit $a, c, d \in \mathbb{R}$ und $|c|, |d| < \infty$. Dann gilt:

1. $$\lim_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = c \pm d$$

2. $$\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = c \cdot d$$

3. $$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{c}{d}, \quad \text{falls} \quad d \neq 0$$

unbestimmter Ausdruck: Als *unbestimmte Ausdrücke* bezeichnen wir Limes, die von folgender Form sind:

$$\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right], [0 \cdot \infty], \left[0^0\right], [1^\infty], \left[\infty^0\right], [\infty - \infty]$$

von de l'Hospital Die Funktionen f und g seien differenzierbar auf dem Intervall (a, b) und $g'(x) \neq 0$, $x \in (a, b)$. Ferner treffe eine der folgenden Annahmen zu:

- $\lim_{x \searrow a} f(x) = 0 \quad \wedge \quad \lim_{x \searrow a} g(x) = 0$ oder
- $\lim_{x \searrow a} f(x) = \pm\infty \quad \wedge \quad \lim_{x \searrow a} g(x) = \pm\infty$.

Dann ist

$$\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls der rechts stehende Limes existiert. Das Analoge gilt für $x \nearrow b$.

A.11 Differentiation

A.11.1 Definition

Differenzenquotient: Für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$

Differenzenquotient. Der Differenzenquotient beschreibt die *mittlere Änderungsrate* im Intervall $[a, b]$. Die Gerade, die durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ verläuft heißt *Sekante*.

Ableitung: Der Grenzwert des Differenzenquotienten

$$f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

liefert die *momentane Änderungsrate* der Funktion f an der Stelle x. Die Sekante in diesem Punkt nennen wir dann *Tangente* an f im Punkt $(x, f(x))$. Siehe dazu Abbildung 11. $f'(x)$ heißt *Ableitungsfunktion*. Sie und ordnet jedem x–Wert die Steigung der Tangente im Punkt $(x, f(x))$ zu.

Notation: Eine andere Schreibweise, die sogenannte *Leibnizsche Symbolik* für die Ableitung von f an der Stelle x ist

$$\frac{d}{dx} f(x) \quad \text{oder auch} \quad \frac{df}{dx}(x)\,.$$

Rechenregeln für Ableitungen:

$$\begin{aligned}
(f(x) \pm g(x))' &= f'(x) \pm g'(x) \\
(f(x) \cdot g(x))' &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) && \text{(Produktregel)} \\
\left(\tfrac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \tfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}\,, \quad g(x) \neq 0 && \text{(Quotientenregel)}
\end{aligned}$$

Tangente an f im Punkt $(x_0, f(x_0))$:

$$T_f(x, x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

A.11.2 Anwendung

Extrema: Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: D \to \mathbb{R}$. Wir sagen eine Funktion f hat in $a \in D$ ein *globales Maximum (Minimum)*, wenn

$$\forall x \in D\; x \neq a \;:\; f(x) \leq f(a) \qquad\qquad (f(x) \geq f(a))\,.$$

Es sei $U_\epsilon(b) := (b - \epsilon, b + \epsilon)$ eine offene Umgebung von b. $b \in D$ heißt *lokales Maximum (Minimum)*, wenn gilt

$$\exists \epsilon > 0\, \forall x \in U_\epsilon(b) \cap D \;:\; f(x) \leq f(b) \qquad\qquad (f(x) \geq f(b))\,.$$

(lokale) Maxima und Minima: Die Funktion $p(x)$ hat bei x_0 ein lokales Minimum (Maximum), falls sowohl hinreichende als auch notwendige Kriterien erfüllt sind.
Notwendiges Kriterium:

$$p'(x_0) = 0$$

Hinreichende Kriterien: (eines davon muss erfült sein)

- $p''(x_0) \neq 0$. Es ist dann x_0 mit

  $p''(x_0) \quad < 0$ ist (lokales) Maximum und mit
  $p''(x_0) \quad > 0$ ist (lokales) Minimum.

- Die erste Ableitung hat ein Vorzeichenwechsel bei x_0, das heißt es gilt

  $$p'(x_0 - \epsilon) \cdot p'(x_0 + \epsilon) < 0$$

  für ein ϵ, das klein genug ist. Dann weiss man, dass

  bei $p'(x_0 - \epsilon) \quad > 0$ ein lokales Maximum vorliegt und
  bei $p'(x_0 - \epsilon) \quad < 0$ ein lokales Minimum vorliegt.

- Wenn das kleinste $n \in \mathbb{N}$, für das gilt

  $$p^{(n)}(x_0) \neq 0 \quad \wedge \quad p^{(n+1)}(x) = 0 \qquad \forall x$$

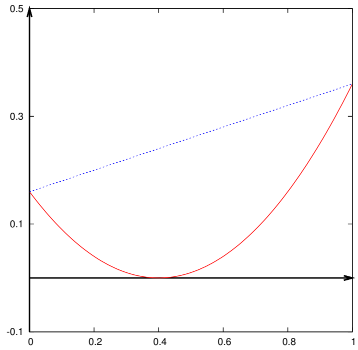
  eine ungerade Zahl ist so liegt

  bei $p^{(n)}(x_0) \quad > 0$ ein lokales Minimum und
  bei $p^{(n)}(x_0) \quad < 0$ ein lokales Maximum vor.

konvex/konkav: Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt *konvex* (konkav), wenn gilt
$\forall x_1, x_2 \in I \; \forall \lambda \in (0,1)$:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

$$(f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2))$$



Wendepunkt: Der Punkt, bei dem die zweite Ableitung ihr Vorzeichen ändert, das heißt bei dem für ein $\epsilon > 0$

$$f''(x_0 - \epsilon) \cdot f''(x_0 + \epsilon) < 0 \quad \text{und} \quad f''(x_0) = 0$$

gilt, heißt *Wendepunkt* von f.

Ableitung der Umkehrfunktion:
Es sei f eine stetige, bijektive Abbildung mit $y = f(x)$. Dann gilt mit $x = f^{-1}(y)$

$$f^{-1'}(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Ableitung von verketteten Funktionen (Kettenregel): Die Funktionen $u : I \to \mathbb{R}$ und $f : u(I) \to \mathbb{R}$ seien differenzierbar. Dann ist $(f \circ u)$ in $x \in I$ differenzierbar und es gilt

$$(f \circ u)'(x) = (f' \circ u)(x) u'(x) \, .$$

Ableitungen der Trigonometrischen Funktionen:

- $\sin' x = \cos x$
- $\cos' x = -\sin x$
- $\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $\cot' x = \frac{-1}{\sin^2 x}$
- $\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$
- $\operatorname{arccot}' x = \frac{-1}{1+x^2}$

A.12 Integration

A.12.1 unbestimmte Integration: Stammfunktion

Stammfunktion: F heißt *Stammfunktion* zu f auf dem Intervall I, wenn $\forall\, x \in I$:

$$F'(x) = f(x)\,.$$

Eine Stammfunktion ist ohne Weiteres nicht eindeutig bestimmt: Aus einer Stammfunktion $F_0(x)$ zu $f(x)$ auf I erhält man alle weiteren Stammfunktionen in der Form $F(x) = F_0(x) + C$ mit willkürlichen C, da eine Konstante bei der Ableitung verschwindet.

unbestimmtes Integral: Ist F auf dem Intervall I eine Stammfunktion zu der Funktion f, gilt also

$$F'(x) = f(x)$$

für alle $x \in I$, so sagen wir auch F sei ein *unbestimmtes Integral* von f auf I. Unbestimmte Integrale bezeichnet man seit Leibniz mit den Symbolen

$$\int f(x)\,dx \quad \text{oder} \quad \int f\,dx\,.$$

Wir sagen *Integral f von x dx* oder *Integral f dx*. f bezeichnen wir als *Integranden* und x als *Integrationsvariable*.

Regeln der unbestimmten Integration:
Das integral ist linear, das heißt für $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int (\alpha f + \beta g)\,dx = \alpha \int f\,dx + \beta \int g\,dx\,.$$

Substitutionsregel: Man substituiere gemäß $x = g(t)$. Dann ist $dx = g'(t)\,dt$ und es gilt

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt\,.$$

A.12.2 bestimmte Integration: Flächen

Riemann–Integral: Für die Funktion $f : [x_0, x_n] \to \mathbb{R}$ und die Zerlegung des Intervalls

$$[x_0, x_n] = \bigcup_{i=0}^{n-1} [x_i, x_{i+1}]$$

seien mit

$$(m_i, M_i) := (\min_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x), \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x))$$

die Folgen "Obersumme S_n" und "Untersumme s_n"

$$S_n := \frac{x_n - x_0}{n} \sum_{i=0}^{n-1} M_i$$
$$s_n := \frac{x_n - x_0}{n} \sum_{i=0}^{n-1} m_i$$

gegeben. Haben die Summen S_n und s_n einen gemeinsamen Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} s_n = A$$

so heißt f *Riemann–integrierbar* oder *R–integrierbar* und das bestimmte Integral der Funktion f von a bis b

$$A = \int_a^b f(x)\, dx$$

heißt *Riemann–Integral*.

Regeln der bestimmten Integration:
Das integral ist linear, das heißt für $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)\, dx = \alpha \int_a^b f\, dx + \beta \int_a^b g\, dx\,.$$

Das Integral auf $[x_0, x_n]$ läßt sich in die Summe von n Integralen auf $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, \ldots, n-1)$ mit $[x_0, x_n] = \bigcup_{i=0}^{n-1} [x_i, x_{i+1}]$ zerlegen:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\, dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx$$

Achtung: Das bestimmte Integral erhält ein negatives Vorzeichen für Bereiche bei denen f negativ ist.

Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung: Ist $F(x)$ eine Stammfunktion der stetigen Funktion $f(x)$, also gilt $F(x)' = f(x)$, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Substitutionsregel: Mit $x = g(t)$ und $dx = g'(t)\,dt$ gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))g'(t)\,dt\,.$$

A.12.3 bestimmte und unbestimmte Integration

Partielle Integration:
unbestimmte Integration:

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx$$

bestimmte Integration:

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$$

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \ln g(x) + C$$

A.12.4 uneigentliche Integration: Grenzwerte

Uneigentliche Integrale:

1. Sei $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ eine Funktion, die über jedem Intervall $[a, R]$, $a < R < \infty$ Riemann–integrierbar ist. Falls der Grenzwert $\lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)\, dx$ existiert, heißt das Integral
$$\int_a^\infty f(x)\, dx := \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)\, dx$$
konvergent. Analog definiert man das Integral für $f :]-\infty, a] \to \mathbb{R}$.

2. Sei $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die über jedem Teilintervall $[a+\epsilon, b]$, $a < a+\epsilon < b$, Riemann–integrierbar ist. Falls der Grenzwert $\lim_{\epsilon\searrow 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x)\, dx$ existiert, so heißt das Integral
$$\int_a^b f(x)\, dx := \lim_{\epsilon\searrow 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x)\, dx$$
konvergent. Analog definiert man das Integral für $f : [a, b[\to \mathbb{R}$.

3. Sei $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ eine Funktion, die über jedem Teilintervall $[\alpha, \beta] \subset]a, b[$ Riemann–integrierbar ist und sei $c \in]a, b[$ beliebig. Falls die beiden uneigentlichen Integrale
$$\int_a^c f(x)\, dx = \lim_{\alpha\searrow a} \int_\alpha^c f(x)\, dx$$
und
$$\int_c^b f(x)\, dx = \lim_{\beta\nearrow b} \int_c^\beta f(x)\, dx$$
existieren, heißt das Integral
$$\int_a^b f(x)\, dx := \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$
konvergent. Diese Definition ist unabhängig von der Wahl von $c \in]a, b[$.

A.12.5 Anwendungen der Integration

Länge eines Grafen: Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Die Länge L eines Grafen $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von $f(a)$ bis $f(b)$ ist gegeben durch

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx\,.$$

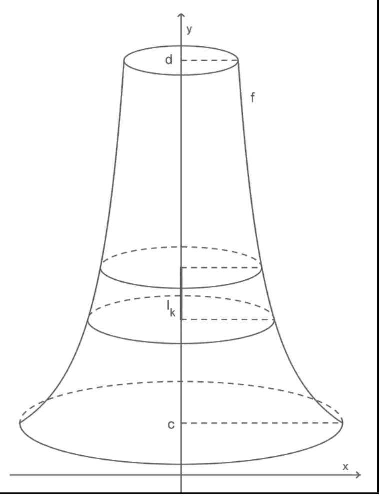
Volumen eines Rotationskörpers I: Für eine Funktion $f(x) : \; [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) \geq 0$ in $[a, b]$ berechnet sich das Volumen des Rotationskörpers bezüglich der x–Achse durch

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx\,.$$

Volumen eines Rotationskörpers II:

Es sei $f(x) : \; [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die auf $[a, b]$ positiv und invertierbar ist. Dreht man das Flächenstück, das durch $f(x)$, die y–Achse und die geraden $y = c$ und $y = d$ entsteht, um die y–Achse so erhält man das Volumen des dadurch entstandenen Rotationskörpers durch

$$V = \pi \int_c^d \left(f^{-1}\right)^2(x)\, dx\,.$$



Mantelfläche: Es sei K ein Rotationskörper, der durch Drehung der Kurve $f(x)$, $x \in [a, b]$ um die x–Achse entstanden ist. Die Fläche M des Mantels von K ist gegeben durch

$$M = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$