Aufgabe 0:

(a) $2^{(3^2)} = 2^9 = 512, \quad (2^3)^2 = 2^{3\cdot 2} = 64$

$2^{3^2} = 2^9 = 512$

(b) $(2+3)^4 = 2^4 + 4\cdot 2^3 \cdot 3 + 6 \cdot 2^2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 2 \cdot 3^3 + 3^4$

$\neq 2^4 + 3^4$

(c) $\sqrt{16+25} = \sqrt{41}$

$\sqrt{16} + \sqrt{25} = 4 + 5 = 9 = \sqrt{81} \neq \sqrt{41}$

Aufgabe 1:

(a) $27^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{27}^2} = \frac{1}{3^2} = \underline{\underline{\frac{1}{9}}}$

(b) $4^{1.5} = 4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{4}^3 = 2^3 = \underline{\underline{8}}$

Aufgabe 2:

(a) $\left(\frac{3}{2}\right)^4 : \left(\frac{3}{2}\right)^6 = \left(\frac{3}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-6} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{4}{9}}}$

(b) $\frac{8^2 \cdot 5^2}{8^2 + 6^2 + 96} = \frac{(8\cdot 5)^2}{(8+6)^2} = \frac{40^2}{14^2} = \left(\frac{20}{7}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{400}{49}}}$

Aufgabe 3:

$a^{-1} - b^{-1} - (a-b)^{-1} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{a-b} = \frac{b(a-b) - a(a-b) - ab}{ab(a-b)}$

$= \frac{ba - b^2 - a^2 + \cancel{ab} - \cancel{ab}}{ab(a-b)} = \underline{\underline{\frac{ba - b^2 - a^2}{ab(a-b)}}}$

Aufgabe 4:

$(a-b)^{n+1}(b-a)^{n-1} = \underline{\underline{(-1)^{n-1}(a-b)^{2n}}}$

Aufgabe 5:

(a) $\sqrt[4]{\sqrt[5]{1024}} = ((2^{10})^{\frac{1}{5}})^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\sqrt{2}}}$

(b) $(\sqrt{18}+\sqrt{2})^2 - (\sqrt{18}-\sqrt{2})^2 = (\sqrt{18}+\cancel{\sqrt{2}}+\sqrt{18}-\cancel{\sqrt{2}}) \cdot$
$(\cancel{\sqrt{18}}+\sqrt{2}-\cancel{\sqrt{18}}+\sqrt{2})$

$= 4\sqrt{18}\sqrt{2} = 4 \cdot 3\sqrt{2}^2 = \underline{\underline{24}}$

Aufgabe 6:

$(1+\sqrt{2})\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} = \sqrt[3]{(1+\sqrt{2})^3(5\sqrt{2}-7)}$

$= \sqrt[3]{(1+3\sqrt{2}+3\sqrt{2}^2+\sqrt{2}^3)(5\sqrt{2}-7)}$

$= \sqrt[3]{(7+5\sqrt{2})(5\sqrt{2}-7)} = \sqrt[3]{-49+50} = \underline{\underline{1}}$

Aufgabe 7:

11, $\underline{12}$, 13, 14, $\underline{15}$, 16, 17, $\underline{18}$, 19, 20, $\underline{21}$,

22, 23, $\underline{24}$; ~~2~~

$A = \{12, 15, 18, 21, 24\}$ "aufzählend"

$= \{n \in \mathbb{N} \mid 3|n \wedge 10 < n < 25\}$

"beschreibend"

Aufgabe 8:

(a) $(\frac{2}{3}, \frac{19}{3})$ (b) $[x, y)$

(c) $[-3, \frac{4}{5}]$ (d) $[-2, \infty)$

Aufgabe 9:

(a) $\underline{\underline{a_n = n^2}}$, $n \in \mathbb{N}$

(b)
$$a_1 = 1$$
$$a_2 = a_1 \cdot \underline{2}$$
$$a_3 = a_2 \cdot \underline{3}$$
$$a_4 = a_3 \cdot \underline{4}$$

$\Rightarrow$ $a_1 = 1$ "implizite Darstellung"
$$\underline{\underline{a_n = a_{n-1} \cdot n}}$$

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} \cdot n \\ &= a_{n-2}\,(n-1) \cdot n \\ &= a_{n-3}\,(n-2)(n-1) \cdot n \\ &\ \vdots \\ &= a_{n-k}\,(n-(k-1)) \cdots n \\ &\ \vdots \ (k = n-1) \\ &= a_1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n \\ &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n! \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$\underline{\underline{a_n = n!}}$ "explizite Darstellung"

Aufgabe 10:

(a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-n+1}{(n-1)(4n+3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - \dots}{4n^2 + \dots} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

(b) $$x := \lim_{n\to\infty} x_n$$ "Heron-Verfahren"

$\Rightarrow$
$$x_{n+1} = \frac{x_n^k (k-1) + a}{k\, x_n^{k-1}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^k (k-1) + a}{k\, x_n^{k-1}}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{x^k(k-1) + a}{k\, x^{k-1}} \quad \Big|\cdot k\, x^{k-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad k\, x^k = x^k(k-1) + a \quad \Big| - x^k(k-1)$$

$$\Leftrightarrow \quad x^k = a$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = \sqrt[k]{a}}}$$

Die Folge konvergiert gegen die k-te Wurzel aus a.

Aufgabe 11:

(a) $\sqrt{t-4}+3=t-\sqrt{t-4}$, $t\geq 4$

$\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{t-4}=(t-3)$

$\Leftrightarrow \quad 4(t-4)=t^2-6t+9$

$\Leftrightarrow \quad t^2-10t+25=0$

$\Leftrightarrow \quad (t-5)^2=0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L}=\{5\}}}$

(b) $\frac{5}{x+3}<\frac{2}{x}$, $x\notin\{0,-3\}$

<u>1. Fall</u> (das Ungleichheitszeichen bleibt erhalten wenn $x\cdot(x+3)>0$ ist)

$x\cdot(x+3)>0 \Leftrightarrow (x>0 \wedge x>-3) \vee$
$(x<0 \wedge x<-3)$

$\Rightarrow \mathbb{L}_{1a}=((0,\infty)\cap(-3,\infty))\cup((-\infty,0)\cap(-\infty,-3))$
$=(0,\infty)\cup(-\infty,-3)=\mathbb{R}\setminus[-3,0]$

Für solche x gilt:

$$\frac{5}{x+3}<\frac{2}{x}$$

$\Leftrightarrow \quad 5x<2x+6$

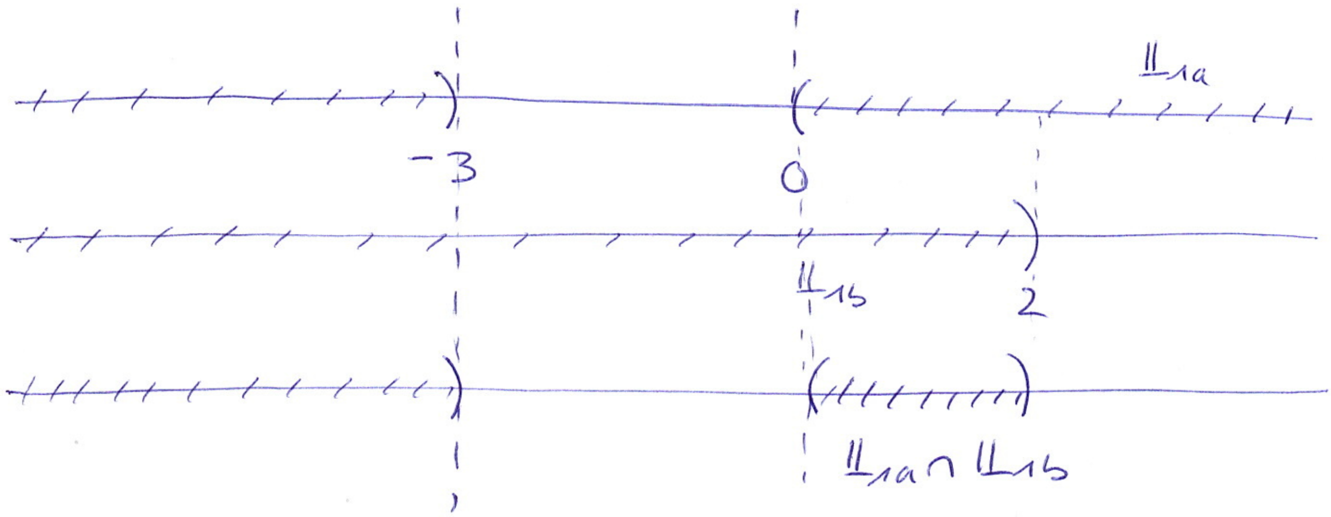
$$\Leftrightarrow \quad 3x < 6$$

$$\Leftrightarrow \quad x < 2$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{L}_{1b} = (-\infty, 2)$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{L}_1 = \mathbb{L}_{1a} \cap \mathbb{L}_{1b} = (\mathbb{R} \setminus [-3,0]) \cap (-\infty, 2)$$

$$= (-\infty, 2) \setminus [-3,0]$$



2. Fall (das Ungleichheitszeichen wechselt wenn $x(x+3)<0$ ist)

$$x \cdot (x+3) < 0 \Leftrightarrow (x<0 \wedge x>-3) \vee (x>0 \wedge x<-3)$$

$$\Rightarrow \mathbb{L}_{2a} = ((-\infty,0) \cap (-3,\infty)) \cup ((0,\infty) \cap (-\infty,-3))$$

$$= (-3,0) \cup \emptyset = (-3,0)$$

Für diese x gilt dann

$$\frac{5}{x+3} < \frac{2}{x}$$

$\Leftrightarrow \quad 5x > 2x + 6$

$\Leftrightarrow \quad 3x > 6$

$\Leftrightarrow \quad x > 2$

$\Rightarrow \quad \mathbb{L}_{2b} = (2, \infty)$

$\Rightarrow \quad \mathbb{L}_2 = \mathbb{L}_{2a} \cap \mathbb{L}_{2b} = (-3, 0) \cap (2, \infty) = \emptyset$

$\Rightarrow \quad \mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \underline{\underline{(-\infty, 2) \setminus [-3, 0]}}$

Aufgabe 12:

Beispiel 23 im Skript auf S. 49

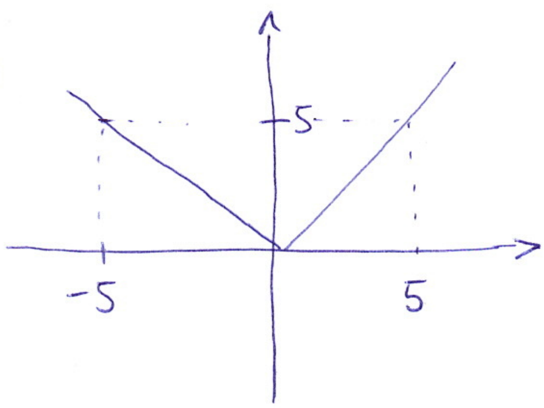
$\mathbb{L}_1 = [-2, 0) \quad \mathbb{L}_3 = (-\infty, -2)$

$\mathbb{L}_2 = (2, \infty) \quad \mathbb{L}_4 = \emptyset$

$\Rightarrow \underline{\underline{\mathbb{L} = \mathbb{R} \setminus [0, 2]}}$

Aufgabe 13:

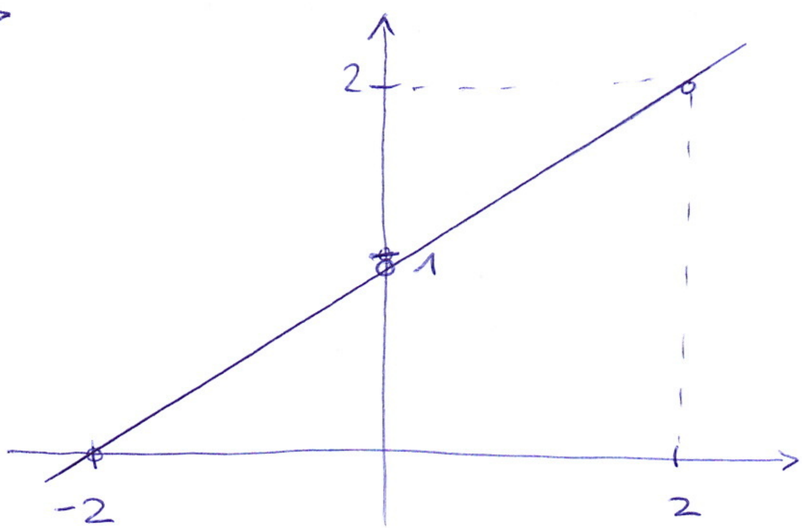
(a)



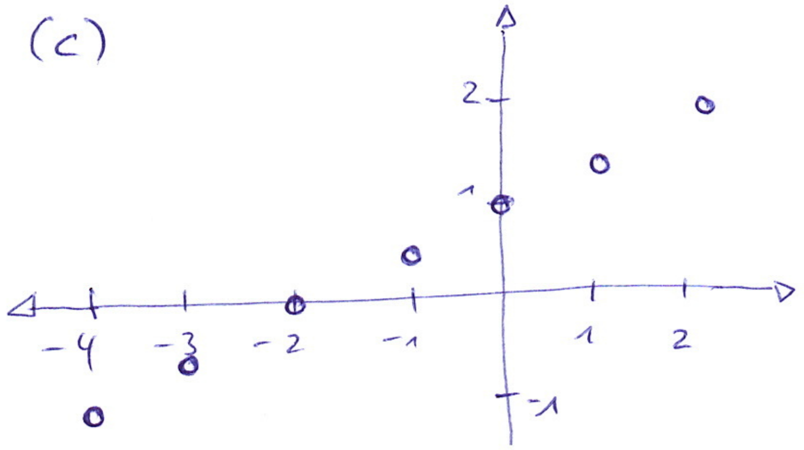
$f([-5, 5]) = [0, 5]$

(b)

$f([-2, 2]) = [0, 2]$



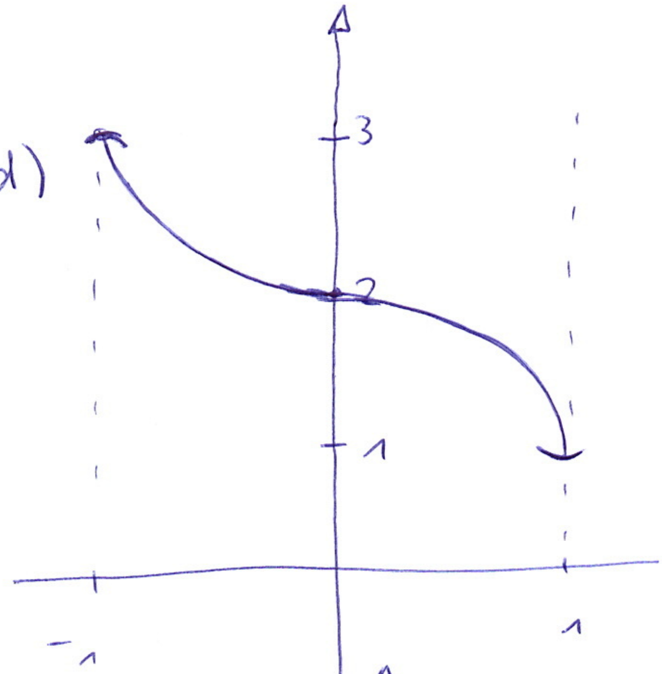
(c)



$\mathbb{D}_f = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$

$f(\mathbb{D}_f) = \{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\}$

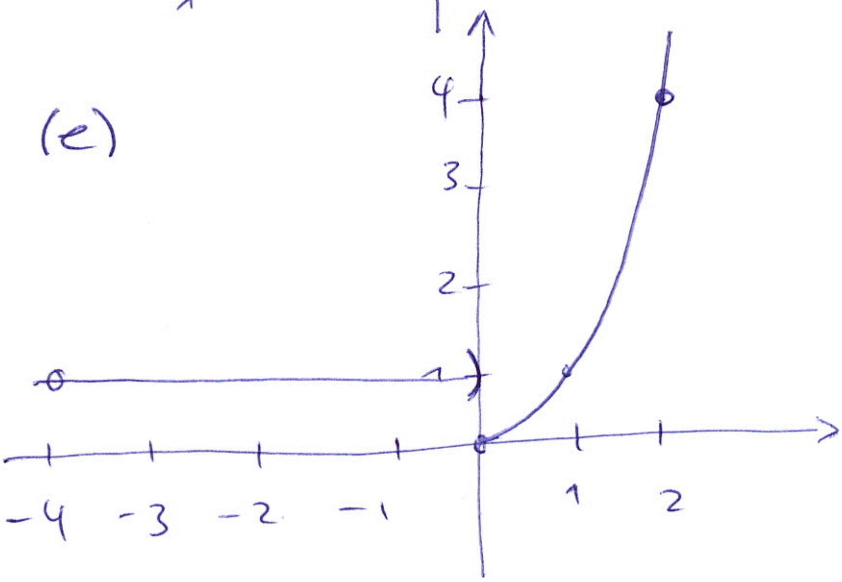
(d)



$\mathbb{D}_f = (-1, 1)$

$f(\mathbb{D}_f) = (1, 3)$

(e)



$f([-4,2]) = [0,4]$

Aufgabe 14

(a)

	2	-3	0	-7	-11	1
3	/	6	9	27	60	147
	2	3	9	20	49	148

$\Rightarrow \underline{\underline{f(3) = 148}}$

(b)

$$x^5+1 = (x^2-1)\left(x^3+x+\frac{x+1}{x^2-1}\right)$$

$$\begin{array}{l} -x^5+x^3 \\ \hline \quad x^3+1 \\ \quad -x^3+x \\ \hline \qquad x+1 \end{array}$$

das kann man noch machen

$$\frac{x+1}{x^2-1} = \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x-1}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{(x^5+1):(x^2-1) = x^3+x+\frac{1}{x-1}}}$$

(c)

$$x^4-2x^3+ax+b = (x^3+2x-1)(x-2$$

$$\begin{array}{l} -\;x^4 \mp 2x^2 + x \\ \hline \quad -2x^3-2x^2+(a+1)x+b \\ \quad +2x^3+4x\mp 2 \\ \hline \qquad -2x^2 + \underbrace{(a+5)x+(b-2)}_{=0} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{a=-5}} \wedge \underline{\underline{b=2}}$$

(d)

(i) $M=\{\pm 1, \pm 3, \pm 9, \pm 27\}$

(ii) $M_{\mathbb{Z}}=\{\pm 1, \pm 2\}$

(iii) $M_{\mathbb{Q}}=\{\pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}\}$

Aufgabe 15

(a) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3+8}{x+2} = \left[\frac{0}{0}\right]$

also ist $(x+2)$ ein Linearfaktor von (x^3+8). Das kann man dann kürzen:

$$
\begin{array}{l}
x^3 + 8 = (x+2)(x^2 - 2x + 4) \\
\underline{-x^3 \mp 2x^2} \\
\quad -2x^2 + 8 \\
\quad \underline{+2x^2 + 4x} \\
\qquad 4x + 8 \\
\qquad \underline{-4x \mp 8} \\
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to -2} \frac{x^3+8}{x+2} = \lim_{x \to -2} x^2 - 2x + 4 = \underline{\underline{12}}$$

(b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\cancel{(1-\sqrt{x})}(1+\sqrt{x})}{\cancel{(1-\sqrt{x})}} = \underline{\underline{2}}$

Bemerkung: Die Situation ist hier wie in (a). Wir können also auch hier eine Division durchführen

$$
\begin{array}{l}
-x + 1 = (-x^{\frac{1}{2}} + 1)(x^{\frac{1}{2}} + 1) = (1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x}) \\
\underline{+x \mp x^{\frac{1}{2}}} \\
\quad -x^{\frac{1}{2}} + 1 \\
\quad \underline{+x^{\frac{1}{2}} \mp 1} \\
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Das ist ja gerade die 3. Binomische Formel, was in (a) nicht der Fall war. Drum geht (b) einfacher und ohne Division.

Aufgabe 16

(a) $\underline{\underline{f'(x) = 4x^3}}$, $\underline{\underline{g'(x) = -x-2}}$, $\underline{\underline{\vartheta'(s) = 0}}$,

$$\underline{\underline{r'(e) = 17e^{16}(\tfrac{1}{2}-e) + (e^{17}+1)(-1)}}$$

$$t'(u) = \frac{2u(2u+1) - 2u^2}{(2u+1)^2} = \frac{2u^2+2u}{(2u+1)^2} = \underline{\underline{\frac{2u(u+1)}{(2u+1)^2}}}$$

$$\alpha'(\beta) = (\beta^{\frac{4}{3}})' = \frac{4}{3}\beta^{\frac{1}{3}} = \underline{\underline{\frac{4\sqrt[3]{\beta}}{3}}}$$

$$\gamma'(\beta) = (\beta^{\frac{3}{4}})' = \frac{3}{4}\beta^{-\frac{1}{4}} = \underline{\underline{\frac{3}{4\sqrt[4]{\beta}}}}$$

(b)

(i) $$\int -2x^3 + 6x^2 - 2\,dx = \underline{\underline{-\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 - 2x + C}}$$

(ii) $$\int r^2 + \frac{1}{r^2}\,dr = \int r^2 + r^{-2}\,dr = \frac{1}{3}r^3 - r^{-1} + C$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{3}r^3 - \frac{1}{r} + C}}$$

(iii) $$\int_2^3 \frac{6}{u^2} - \frac{2}{u^3}\,du = \int_2^3 6u^{-2} - 2u^{-3}\,du$$

$$= -6\frac{1}{u} + \frac{1}{u^2}\Big|_2^3 = \left(-6\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2}\right) - \left(-6\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)$$

$$= -2 + \frac{1}{9} + 3 - \frac{1}{4} = \frac{1}{36}(36 + 4 - 9) = \underline{\underline{\frac{31}{36}}}$$

(iv) $\int_1^{16} \sqrt[4]{x} - \frac{1}{\sqrt{x^5}} \, dx = \int_1^{16} x^{\frac{1}{4}} - x^{-\frac{5}{2}} \, dx$

$= \frac{4}{5} x^{\frac{5}{4}} + \frac{2}{3} x^{-3/2} \Big|_1^{16} = \left(\frac{4}{5} 4^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} 4^{-3}\right) - \left(\frac{4}{5} + \frac{2}{3}\right)$

$\approx \underline{\underline{24,14}}$ (TR)

(c) Schnittpunkte von f und g:

$f(x) = g(x)$

$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}x^3 - x + \frac{13}{4} = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$

$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 0$

$\Leftrightarrow \quad x^3 + 2x^2 - 12x + 9 = 0$

$M = \{\pm 1, \pm 3, \pm 9\}$

	1	2	-12	9
1	/	1	3	-9
	1	3	-9	0

Bingo! $\underline{\underline{x_1 = 1}}$

$x^2 + 3x - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{2/3} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+36}}{2} = \frac{-3 \pm 3\sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow \quad x_2 = -\frac{3+3\sqrt{5}}{2}$ (negative x-Achse)

$\wedge \quad \underline{\underline{x_3 = 3\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} > 0$ (positive x-Achse)

Die gesuchte Fläche erhalten wir durch

$$\left|\int_0^1 f(x)-g(x)\,dx\right| + \left|\int_1^{3\frac{\sqrt{5}-1}{2}} f(x)-g(x)\,dx\right|.$$

Stammfunktion:

$$\int f(x)-g(x) = \int \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{9}{4}$$

$$= x^4\frac{1}{16} + \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}x = F(x)$$

benötigte Auswertungen

$$F(0)=0, \quad F(1) = \frac{1}{16} + \frac{1}{6} - \frac{3}{2} + \frac{9}{4}$$

$$= \frac{1}{16\cdot 3}(3+8-72+108) = \frac{47}{48}$$

$$F\left(3\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \overset{(TR)}{\approx} 0{,}8161$$

$$\Rightarrow A = |F(1)-F(0)| + \left|F\left(3\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) - F(1)\right|$$

$$\approx 0{,}9792 + |0{,}8161 - 0{,}9792|$$

$$= 2\cdot 0{,}9792 - 0{,}8161 = \underline{\underline{1{,}1422}}$$

Aufgabe 17

Länge der Leiter: $\sqrt{h^2+x^2}$

Es gilt: $\frac{h}{x} = \frac{8}{x-1} \Rightarrow h = \frac{8x}{x-1}$

Funktion der Leiterlänge in Abhängigkeit von x:

$$L(x) = \sqrt{\left(\frac{8x}{x-1}\right)^2 + x^2}$$

Statt L(x) zu minimieren kann man auch

$$\tilde{L}(x) = \left(\frac{8x}{x-1}\right)^2 + x^2$$

minimieren (Monotonie der $\sqrt{\ }$-Funktion)

Gesucht ist also x mit $\tilde{L}'(x) = 0$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{64x^2}{x^2-2x+1} + x^2\right) = \frac{128x(x^2-2x+1) - 64x^2(2x-2)}{(x-1)^4} + 2x$$

$$= 0$$

später auf den Nenner achten!

Nullstelle des Zählers suchen:

$$\Leftrightarrow \cancel{128x^3} - 256x^2 + 128x - \cancel{128x^3} + 128x^2$$
$$+ 2x^5 - 8x^4 + 12x^3 - 8x^2 + 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^5 - 8x^4 + 12x^3 - 136x^2 + 130x = 0, \quad x_1 = 0$$

$$\Rightarrow x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 68x + 65 = 0$$

$M = \{\pm 1, \pm 5, \pm 13\}$ Horner $\Rightarrow$ $x_2 = 5$

$x_3 = 1$

Horner

	1	−4	6	−68	65
5	/	5	5	55	−65
	1	1	11	−13	0
1	/	1	2	13	
	1	2	13	0	

Sehen Sie warum $x=1$ keine Lösung sein kann?

$x^2+2x-13=0$
hat in $\mathbb{R}$ keine Lösung

$$\Rightarrow \tilde{L}'(x) = \frac{2x\cancel{(x-1)}(x-5)(x^2+2x-13)}{(x-1)^{\cancel{4}\,3}}$$

Demnach hat $\tilde{L}'(x)=0$ in $\mathbb{R}$ die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \{0, 5\}$$

0 ist kein brauchbarer Wert für uns.

Die kürzest mögliche Leiter (Es sollte $\tilde{L}''(5)>0$ sein!) hat demnach die Länge

$$L(5) = \sqrt{\left(\frac{8\cdot 5}{5-1}\right)^2 + 25} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5} \approx \underline{\underline{11{,}18}}$$

Aufgabe 18 (Kurzform)

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 4x$$

(dort nur 0 als rationale Nullstelle → Horner)

$$f'(x) = x^3 - 3x^2 + 4 = (x+1)(x-2)^2$$

$$f''(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

$$f^{(3)}(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$$

Untersuchung markanter Stellen:

x	-1	0	2	
$f(x)$	$-\frac{11}{4}$	0	4	
$f'(x)$	0	$\neq 0$	0	
$f''(x)$	>0	0	0	
$f^{(3)}(x)$		$\neq 0$	$\neq 0$	
	TP	EP + WP = SP	NP + WP	

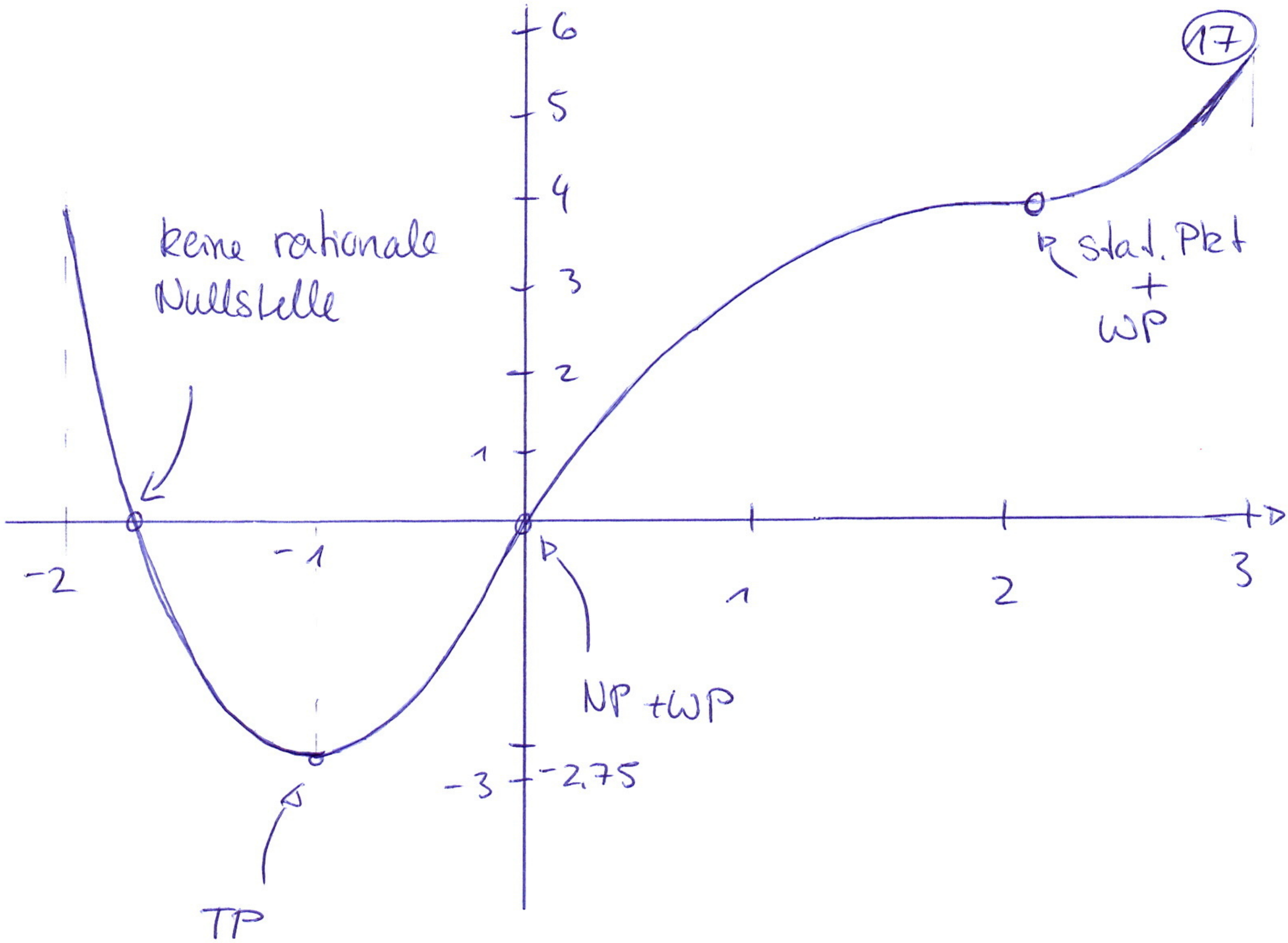
TP = Tiefpunkt
SP = Sattelpunkt
WP = Wendepunkt
NP = Nullpunkt
EP = Extrempunkt

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{TP = \left(-1, -\frac{11}{4}\right)}}$

$\underline{\underline{SP = (2, 4)}}$

$\underline{\underline{WP = (0, 0)}}$

Bereich: $[-2,3] \times f([-2,3]) = [-2,3] \times [-2.75, 5.25]$


17
6
5
4
3
2
1
-3
-2,75
-2
-1
1
2
3
keine rationale Nullstelle
stat. Pkt + WP
NP + WP
TP