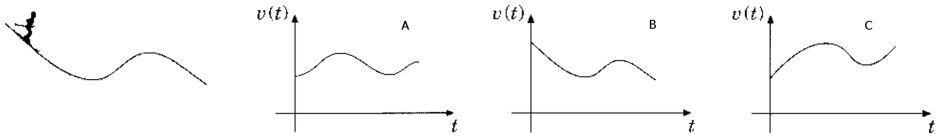
School of Engineering
Winterthur
Zürcher Hochschule für Angewandte Wissenschaften

Blatt 24: Repetition MAE2 — MAE 2

Abschnitt I

Aufgabe 1 Graphen bestimmten



Die drei Graphen in den Abbildungen A, B und C bescreiben jeweils einen geschwindigkeitsvlerauf. Welcher Graph passt zum links abgebildeten Skifahrer, der gerade mitten bei der Abfahrt ist?

Lösung auf Seite 11

Aufgabe 2 Definitionsbereich

Gegeben sind die Funktionen

$$f(x) = \frac{4}{x-1} \quad \text{und} \quad g(x) = 2\,x\,.$$

(a) Geben Sie die Definitionsbereiche $\mathbb{D}_f$, D_g, $\mathbb{D}_{f\circ g}$ und $D_{g\circ f}$ an.

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(g(x)) = g(f(x))$?

Lösung auf Seite 11

Aufgabe 3 Bijektivität und Umkehrabbildung

Berechnen Sie jeweils die **Umkehrfunktion** der folgenden Funktionen. Wie muss der Definitionsbereich gewählt werden, damit eine Umkehrfunktion existiert?

$$\begin{array}{llll}
(a) & f(x) = \dfrac{x}{2} + 3 & (b) & f(x) = \dfrac{1}{4}(x-2)^2 + \dfrac{7}{2} \\
(c) & f(x) = \dfrac{1}{2x} & (d) & f(x) = \dfrac{7x-2}{3x+2} \\
(e) & f(x) = \ln(1+x^2) & (f) & f(x) = \ln(3+\mathrm{e}^{x-4})
\end{array}$$

Lösung auf Seite 11

Aufgabe 4

Lösen Sie in $\mathbb{R}$ folgende Gleichungen nach x auf ...

(a)

$$(i) \quad \mathrm{e}^{x+1} - \mathrm{e}^{x} = 1 \qquad (ii) \quad 2^{x+2} - 6 \cdot 2^{x+1} = -64$$

(b)

$$(i) \quad e^{2x} - 2e^{x} - 3 = 0 \qquad (ii) \quad e^{x} + e^{-x} = 2$$

(c) Bestimmen Sie Definisitonsbereich $\mathbb{D}$ und Lösungsmenge $\mathbb{L}$ folgender Gleichung:

$$2 \, \log_a x - \log_a (x+6) = 0$$

(d) Vereinfachen Sie den Ausdruck soweit wie möglich:

$$-\frac{1}{3} \log(x^2 y^{-2} z) + \frac{1}{3} \log(x^{-1} y z)$$

Lösung auf Seite 13

Aufgabe 5

Welches ist der Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$ von

$$f(x) = \cos(\arctan x)$$

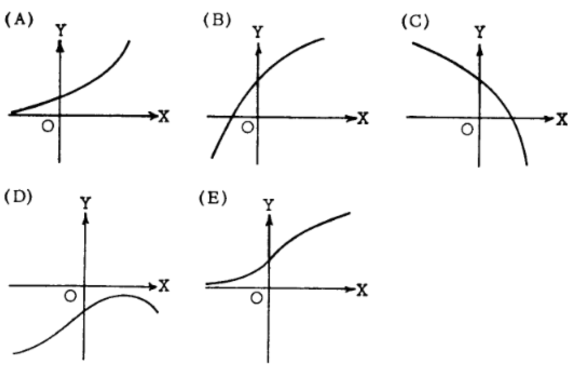
und welche Menge ist das Bild von $\mathbb{D}_f$ unter f?

Lösung auf Seite 15

Abschnitt II

Aufgabe 6

Welche der Abbildungen könnten ein Teil des Graphes der Funktion $f(x)$ mit den Eigenschaften $f'(x) > 0$ und $f''(x) < 0$ für alle x sein?



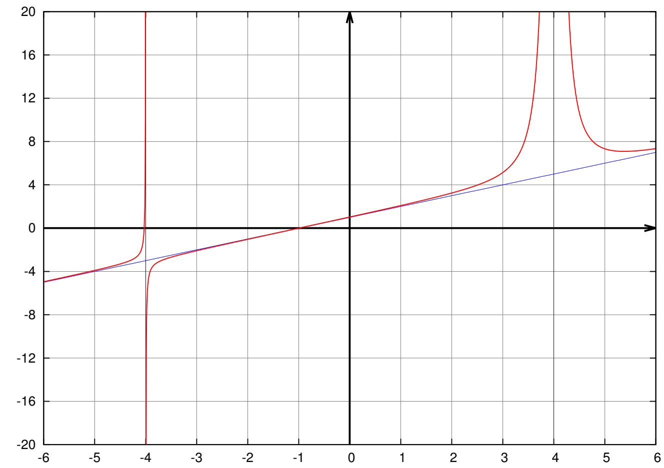
☐ (A) ☐ (B) ☐ (C)
☐ (D) ☐ (E)

Lösung auf Seite 15

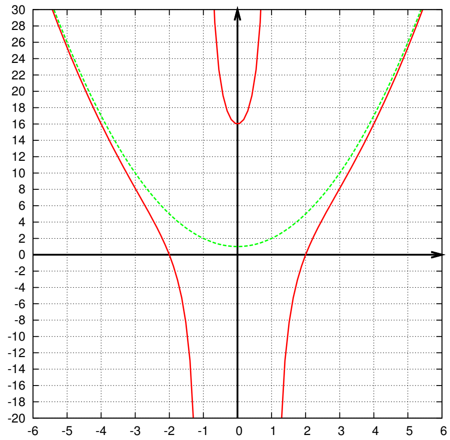
Aufgabe 7 Bestimmung einer rationalen Funktion

Geben Sie die gebrochen rationale Funktion $f(x)$ an, die jeweils durch den roten Graphen dargestellt wird.

(a)



(b)



Lösung auf Seite 16

Abschnitt III (Ableitungen)

Aufgabe 8 Produkt- und Quotientenregel

Berechnen Sie folgende Ableitungen und verwenden Sie dabei Produkt- und Quotientenregel.

$$f(x) = (x^2 - 1)\,\mathrm{e}^x \qquad g(y) = \frac{y - x}{y^2} \qquad v(\alpha) = \mathrm{e}^\alpha\ \ln\alpha$$

$$f(b) = \ln|\sin b| \qquad w(f) = x^{-\frac{3}{4}}\,\frac{f^{-\frac{7}{6}} + f}{3} \qquad \beta(g) = g^2\ \tanh g$$

Lösung auf Seite 17

Aufgabe 9 Kettenregel

Berechnen Sie die Ableitung folgender Funktionen

$$(a)\ f(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{\cos(2\,x)}} \qquad (b)\ v(\varphi) = \sin\left(\sqrt{\varphi}\right)\ ,\ \varphi \in [0, 360°]$$

Lösung auf Seite 18

Aufgabe 10 Ableitung von Umkehrabbildungen

$$\frac{d}{dx}\arcsin\left(2\,x\right) = ?$$

Lösung auf Seite 18

Abschnitt IV (Integration)

Aufgabe 11

(a) Berechnen Sie die unbestimmten Integrale

$$(i)\ \int \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}\,dx \qquad (ii)\ \int x^2\,\cos(3\,x)\,dx$$

(b) Berechnen Sie die Integrale

$$(i)\ \int_0^8 \frac{dx}{\sqrt{1+x}} \quad (ii)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}\,dx \quad (iii)\ \int_1^4 |x-3|\,dx$$

(c) Berechnen Sie die Integrale mit PBZ

(i)

$$\int_1^2 \frac{x}{x^3+4\,x^2+5\,x+2}\,dx\,.$$

(ii)

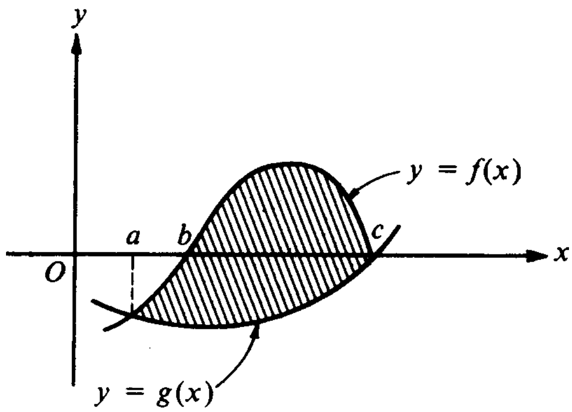
$$\int \frac{2\,x^3-12\,x^2+20\,x-2}{x^2-6\,x+9}\,dx$$

(d) Berechnen Sie den Flächeninhalt, der von den Kurven

$$f(x) = 2\,x^3+3\,x^2 \quad \text{und} \quad g(x) = x^3+2\,x^2+2\,x$$

eingeschlossen wird.

(e) Welche der folgenden Integrale beschreibt den Inhalt der schraffierten Fläche?



☐ $\int_a^c (|f(x)| - |g(x)|)\,dx$

☐ $\int_b^c f(x)\,dx - \int_a^c g(x)\,dx$

☐ $\int_a^c g(x) - f(x)\,dx$

☐ $\int_a^c f(x) - g(x)\,dx$

☐ $\int_a^b g(x) - f(x)\,dx + \int_b^c f(x) - g(x)\,dx$

Lösung auf Seite 18

Aufgabe 12 ⋆⋆

Berechnen Sie das Doppelintegral

$$\int \left(\frac{1}{x} \int_1^x \frac{du}{u} \right) \, dx$$

Lösung auf Seite 21

Abschnitt V (Grenzwerte)

Aufgabe 13 de l'Hôspital

Berechnen Sie die Grenzwerte

(a)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(3\,x)}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}$$

(b)

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$$

(c)

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \, \ln \left(\frac{2+h}{2} \right)$$

Tipp: Erzeugen Sie falls nötig eine Situation, die vom Typ $\left[\frac{0}{0}\right]$ ist. Wiederholen Sie de l'Hôspital so lange Sie das "brauchen".

Lösung auf Seite 22

Aufgabe 14

$$\lim_{h \to 0} \frac{\left(\frac{1}{2} + h\right)^8 - \left(\frac{1}{2}\right)^8}{h} = ?$$

Tipp: Denken Sie an den Differenzenquotienten.

Lösung auf Seite 23

Aufgabe 15 uneigentliche Integration

(a) Existiert ein Wert für

$$\int_0^2 \frac{x-2}{x^2 - 3\,x + 2} \, dx\,?$$

(b) Wie groß ist der Flächeninhalt zwischen

$$f(x) = \frac{x^2}{e^{x^3}}$$

und der positiven x-Achse?

Lösung auf Seite 23

Abschnitt VI (Trigonometrie)

Aufgabe 16 Sinus malen

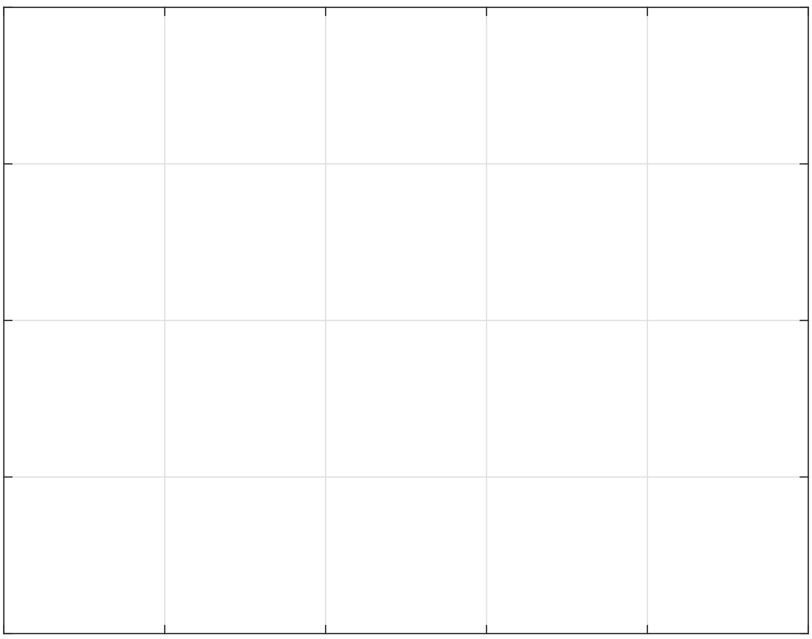
Skizzieren Sie den Graphen der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{\pi}x + \frac{1}{2}\right) - 1\,.$$

Überlegen Sie sich zunächst die Werte für

Amplitude $A =$, Kreisfrequenz $\omega =$, Periode $P =$ und Nullphase $\varphi =$

vertikale Verschiebung $=$, horizontale Verschiebung $=$



(Vergessen Sie die Achsenbeschriftung nicht!)

Lösung auf Seite 24

Aufgabe 17 Superposition

Welche Amplitude hat die Schwingung

$$f(x) = \sqrt{3}\,\cos x + 3\,\sin x\,?$$

Lösung auf Seite 24

Aufgabe 18 Schwingung

Bei einem harmonischen Oszillator wird ein Objekt an einer Feder mit der Startauslenkung A und einer Startgeschwindigkeit 0 in Schwingung gebracht.

(a) Um welchen Faktor verändert sich die Periode bei Verdoppelung der Startauslenkeung?

$$\square\, 2 \qquad \square\, \frac{1}{2} \qquad \square\, 1 \qquad \square\, \frac{1}{4}$$

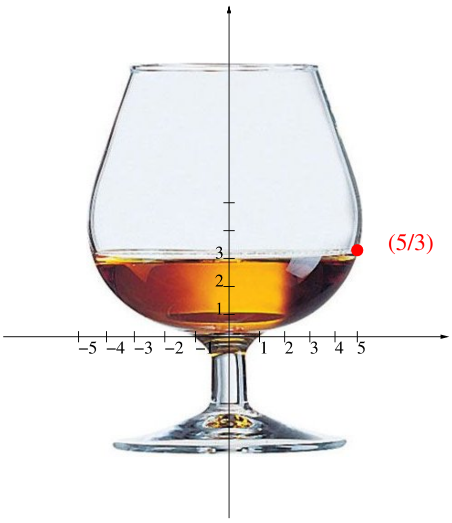
(b) Um welchen Faktor veränder sich die Maximalgeschwindigkeit des oszillierenden Objekts?

$$\square\, 2 \qquad \square\, \frac{1}{2} \qquad \square\, 1 \qquad \square\, \frac{1}{4}$$

Lösung auf Seite 25

Abschnitt VII (Anwendung der Integration)

Aufgabe 19 Volumenberechnung



Wieviel ml Cognac befinden sich im Glas? (1E = 1cm) Verwenden Sie den Graphen f mit

$$f(x) = \frac{1}{1800}\left(x^4 + b\,x^2\right)\,,$$

der den Rand das Glases im relevanten Bereich beschreibt.

Lösung auf Seite 25

Abschnitt VIII (Taylorpolynom und -reihe)

Aufgabe 20 Taylorpolynom

Berechnen Sie das Taylorpolynom 2–ten Grades, entwickelt um $x_0 = \pi$, von der Funktion

$$f(x) = \sqrt[3]{\cos(2\,x)}\,.$$

Lösung auf Seite 26

Aufgabe 21 Konvergenzbereich

Bestimmen Sie jeweils den Konvergenzradius der Potenzreihen

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n - 2^n} \qquad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n \cdot 3^n}\,.$$

Lösung auf Seite 27

Abschnitt IX

Aufgabe 22 Maxima

Für welches $k \in \mathbb{Z}$ hat der Ausdruck $x - \frac{k}{x}$ bei $x = -2$ ein lokales Maximum?

Lösung auf Seite 27

Aufgabe 23 Kurvendiskussion

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}\,.$$

Skizzieren Sie den Grafen dieser Kurve (Verhalten im Unendlichen, Schnitt mit den Achsen, Extrema, Wendepunkt) und berechnen Sie den Flächeninhalt des Flächenstücks, das von der Kurve f mit der positiven x-Achse "eingeschlossen" wird.

Tipp: Denken Sie an die partielle Integration.

Lösung auf Seite 27

Abschnitt X

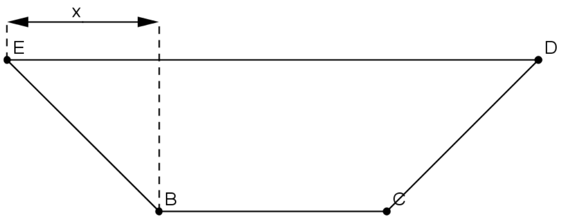
Aufgabe 24 Parameter bestimmen

Für welches $a \in \mathbb{R}$ ist $Q = \binom{1}{1}$ auf dem Graphen von $f(x) = x^2$ der nächstgelegene Punkt zu $P\binom{a}{0}$?

Lösung auf Seite 28

Aufgabe 25 Rinnenvolumen maximieren

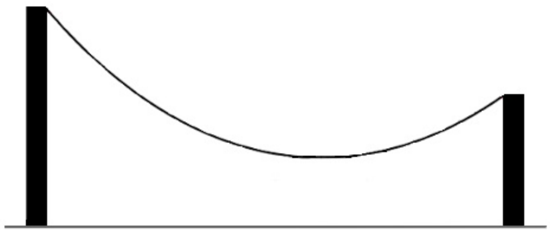
Der Querschnitt einer oben offenen Rinne ist ein gleichschenkliges Trapez (siehe Skizze) mit $\overline{BC} = 2$ dm und $\overline{CD} = \overline{BE} = 2$ dm. Berechnen Sie x für den Fall, dass der Flächeninhalt des Querschnitts maximal wird. Geben Sie diesen maximalen Flächeninhalt an.



Lösung auf Seite 29

Aufgabe 26 Hochseilgarten

In einem Freizeitpark soll auf dem Abenteuerspielplatz eine Seilbahn gebaut werden. Der Freizeitparkbetreiber übergibt diese Aufgabe einem Architektenbüro seines Vertrauens. Das Seil soll zwischen zwei Pfeilern gespannt werden, die einen Abstand von 50 m haben. Wenn sich ein Mensch an das Seil hängt, darf er den Boden nicht berühren.



Der Architekt geht davon aus, dass für diese Seilbahn das durchhängende Seil (ohne Belastung) durch die Funktion f mit folgender Gleichung beschrieben werden kann:

$$f(x) = 30\,\cosh\left(\frac{1}{30}x - 1\right) - 25\,,\ x \in [0, 50]$$

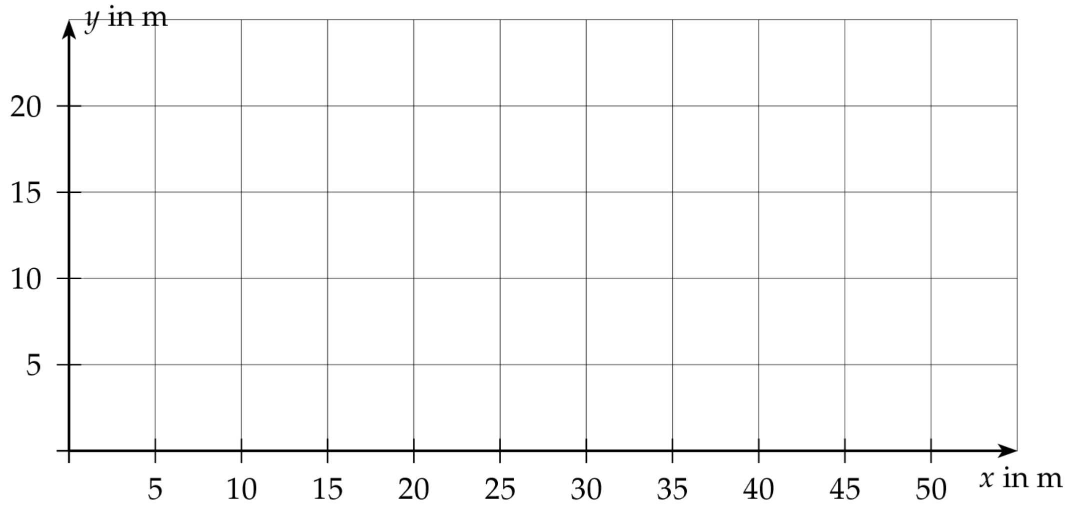
Das Seil verläuft in Richtung der positiven x-Achse, die im ebenen Erdboden unter der Seilbahn liegt.

(a) Der erste Pfeiler steht mit seinem Fuß an dem Punkt $(0, 0)$. Im Abstand von 50 m soll der zweite Pfeiler aufgestellt werden. Berechnen Sie die notwendige Höhe der zwei Pfeiler.

(b) Berechnen Sie die Steigung des Seiles in den beiden Aufhängepunkten.

(c) Bei Belastung hängt das Seil höchstens 1 m durch. Bestätigen Sie, dass dann ein Mensch von 2 m Länge an jeder Stelle des Seils hängen kann, ohne den Boden zu berühren.

(d) Zeichnen Sie den Graphen von f und die beiden Pfeiler in das beigefügte Koordinatensystem ein.



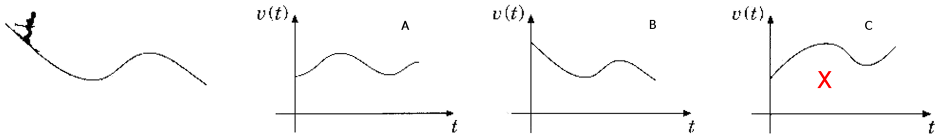
(e) Der Assistent des Architekten überlegt sich, dass der Verlauf des Seiles näherungsweise auch durch eine quadratische Funktion p beschrieben werden kann. Diese Funktion p muss natürlich dieselben Aufhängepunkte wie die Funktion f haben und soll auch durch den tiefsten Punkt verlaufen. Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel p.

(f) Der Assistent behauptet, dass sich die beiden Graphen praktisch kaum unterscheiden. Das soll überprüft werden. Bestimmen Sie den durchschnittlichen Unterschied ($\int f - p$) der beiden Funktionen in den Teilbereichen vom Start bis 30 m und für den zweiten Teil der Seilbahn von 30 m bis 50 m. Vergleichen Sie nun den durchschnittlichen Unterschied zwischen f und p getrennt für die beiden oben genannten Bereiche und beurteilen Sie die Behauptung des Assistenten.

Lösung auf Seite 29

Abschnitt I

Lösung 1



Lösung 2

Es ist

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{4}{g(x) - 1} = \frac{4}{2\,x - 1}$$

und

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2\,f(x) = \frac{8}{x - 1}$$

und damit gilt weiter:

(a)

$$\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} \qquad \mathbb{D}_g = \mathbb{R}$$

$$\mathbb{D}_{f \circ g} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\} \qquad \mathbb{D}_{g \circ f} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

(b)

$$\begin{aligned}
& & f(g(x)) &= g(f(x)) \\
&\Leftrightarrow & \frac{4}{2\,x - 1} &= \frac{8}{x - 1} \\
&\Leftrightarrow & 4\,(x - 1) &= 8\,(2\,x - 1) \\
&\Leftrightarrow & x &= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Es ist } f(g(x)) = g(f(x)) \text{ für } x = \tfrac{1}{3}}$$

Lösung 3

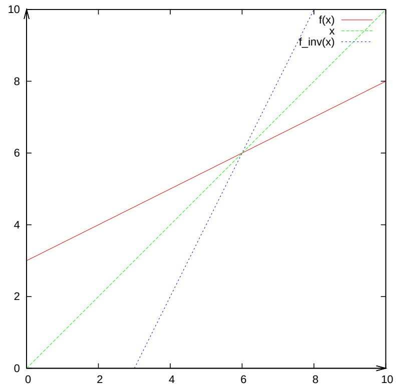
(a)

Ganz ungefährliche Situation:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist bijektiv und somit auch $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f^{-1}(x) = 2(x-3)$$

mit dem Definitionsbereich

$$\mathrm{D}_{f^{-1}} = \mathbb{R}$$



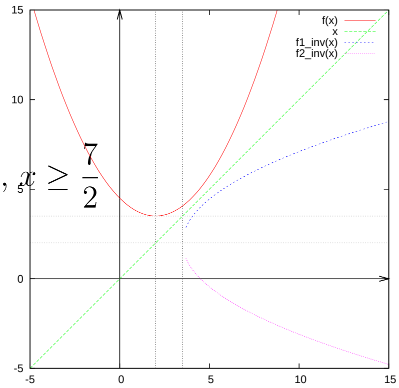
(b)

f ist jeweils bijektiv auf den Teilintervallen $(-\infty, 2]$ und $[s, \infty)$. Wir erhalten für je ein Teilintervall eine Umkehrfunktion:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x - \frac{7}{2}} + 2 & \text{für } f \text{ auf } (2, \infty) \\ -2\sqrt{x - \frac{7}{2}} + 2 & \text{für } f \text{ auf } (-\infty, 2) \end{cases}, \; x \geq \frac{7}{2}$$

mit dem Definitionsbereich:

$$\mathrm{D}_{f^{-1}} = \left[\frac{7}{2}, \infty\right)$$



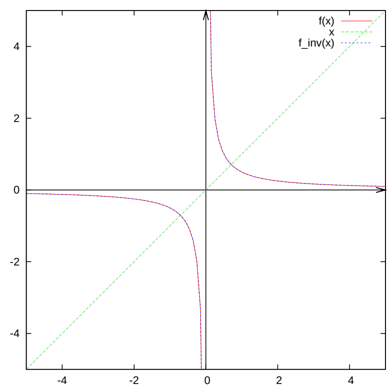
(c)

$f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ bijektiv und auch seine Umkehrfunktion

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2x}$$

mit dem Definitionsbereich

$$\mathrm{D}_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$



(d)

$$f(x) = \frac{7x-2}{3x+2}$$

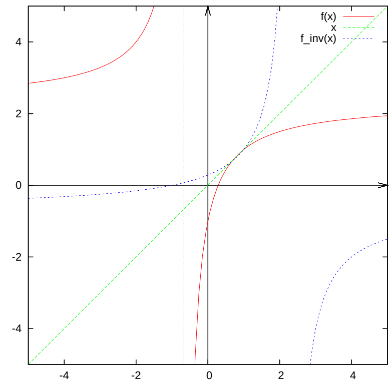
x separieren durch Polynomdivision:

$$= \frac{7}{3} - \frac{20}{3(3x+2)}$$

$$\Rightarrow \qquad f^{-1}(x) = \frac{2x+2}{7-3x}$$

und den Definitionsbereich können wir direkt ablesen:

$$\mathrm{D}_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{7}{3}\}$$



(e)

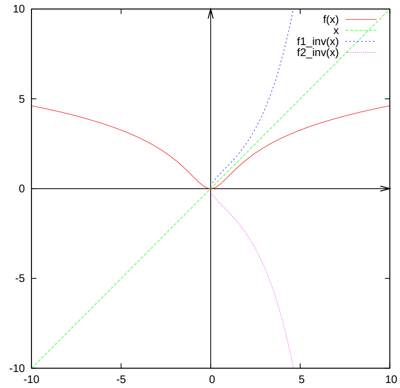
f ist bijektiv auf $\mathbb{R}_0^+$ und $\mathbb{R}_0^-$. Auf den jeweiligen Teilgebieten erhalten wir die Umkehrfunktionen

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{\mathrm{e}^x - 1} \\ -\sqrt{\mathrm{e}^x - 1} \end{cases} , \; x \geq 0$$

und den Definitionsbereich

$$\mathrm{D}_{f^{-1}} = \mathbb{R}_0^+$$

weil $\mathrm{e}^x \geq 1$ gelten muss.



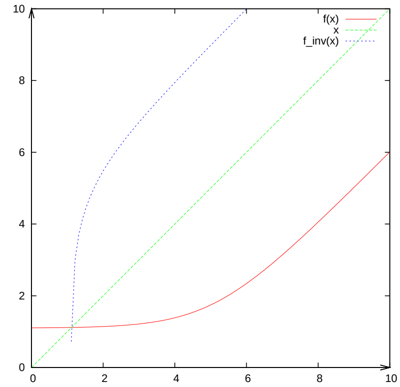
(f)

$f : \mathbb{R} \to (\ln 3, \infty)$ Daraus ergibt sich der Definitionsbereich für die Umkehrfunktion

$$f^{-1}(x) = \ln(\mathrm{e}^x - 3) + 4$$

also

$$\mathrm{D}_{f^{-1}} = (\ln 3, \infty)$$



Lösung 4

(a) (i)

$$\begin{aligned} & \mathrm{e}^{x+1} - \mathrm{e}^{x} = 1 \\ \Leftrightarrow\quad & \mathrm{e}^{x}\,(e-1) = 1 \\ \Leftrightarrow\quad & \mathrm{e}^{x} = \frac{1}{(e-1)} \\ \Leftrightarrow\quad & x = \ln\left(\frac{1}{(e-1)}\right) \\ \Leftrightarrow\quad & x = -\ln(e-1) \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} & 2^{x+2} - 6\cdot 2^{x+1} = -64 \\ \Leftrightarrow\quad & 2^{x+2} - 6\,\frac{1}{2}\,2^{x+2} = -2^{6} \\ \Leftrightarrow\quad & 2^{x+2}(1-3) = -2^{6} \\ \Leftrightarrow\quad & 2^{x+2} = 2^{5} \\ \Leftrightarrow\quad & x = 3 \end{aligned}$$

(b) (i)

$$\begin{aligned} & \mathrm{e}^{2\,x} - 2\,\mathrm{e}^{x} - 3 = 0 \qquad\qquad y := \mathrm{e}^{x} \\ \Leftrightarrow\quad & y^2 - 2\,y - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & y_{1,2} = 1 \pm 2 \\ \Rightarrow\quad & \underbrace{\mathrm{e}^{x_1} = -1}_{\text{Widerspruch}} \quad\vee\quad \mathrm{e}^{x_2} = 3 \\ \Leftrightarrow\quad & x = \ln 3 \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} & \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} = 2 \qquad\qquad y := \mathrm{e}^{x} \\ \Leftrightarrow\quad & y + \frac{1}{y} = 2 \\ \Leftrightarrow\quad & y^2 - 2\,y + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & y = 1 \\ \Leftrightarrow\quad & \mathrm{e}^{x} = 1 \\ \Leftrightarrow\quad & x = 0 \end{aligned}$$

(c) Das Argument vom Logarithmus muss positiv sein, also es muss für x

$$x > 0 \quad \wedge \quad x > -6$$

gelten. Daraus ergibt sich der Definitionsbereich

$$\mathbb{D} = (0, \infty) \cap (-6, \infty) = (0, \infty) = \mathbb{R}^+ .$$

Wir lösen nach x auf:

$$\begin{aligned}
& 2 \log_a x - \log_a(x+6) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \log_a(x^2) - \log_a(x+6) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \log_a\left(\frac{x^2}{x+6}\right) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{x^2}{x+6} = 1 \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 - x - 6 = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & x_{1,2} \in \{-2, 3\}
\end{aligned}$$

Da $x = -2 \notin \mathbb{D}$ erhalten wir schlussendlich die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \{3\} .$$

(d)

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{3}\log(x^2y^{-2}z) + \frac{1}{3}\log(x^{-1}yz) &= \frac{1}{3}\log\left(\frac{x^{-1}yz}{x^2y^{-2}z}\right) \\
&= \frac{1}{3}\log\left(\frac{y^3}{x^3}\right) = \log\sqrt[3]{\frac{y^3}{x^3}} = \log\left(\frac{y}{x}\right)
\end{aligned}$$

Lösung 5 Es ist

$$\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

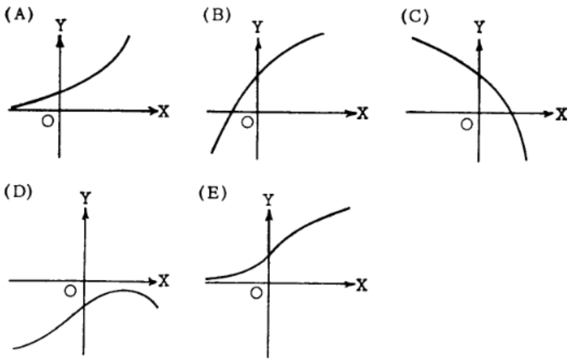
und da der Kosinus auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist gilt $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$. Das Bild von $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ unter f ist dann das Bild von $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ unter dem Kosinus, also

$$f(\mathbb{R}) = (0, 1] .$$

Abschnitt II (Graphen)

Lösung 6

Wegen $f'(x) > 0$ scheiden (C) und (D) aus. $f''(x) < 0$ sagt, dass es sich um eine konkave Kurve handelt, womit (A) und (E) ausscheiden. Bleibt noch (B), wobei es sich um die einzige konkave, streng monoton wachsende Funktion handelt.



☐ (A) ☒ (B) ☐ (C)
☐ (D) ☐ (E)

Lösung 7

(a)

Ansatzfunktion:	$f(x) = g(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$
Asymptote:	$g(x) = 1 + x$
Polstellen:	$q(x) = (x+4)(x-4)^2$
Führt auf:	$f(x) = x + 1 + \frac{r(x)}{(x+4)(x-4)^2}$
Nullstelle:	$f(-1) = \frac{r(-1)}{4^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad r(x) = 1 + x$
Insgesamt:	$f(x) = x + 1 + \frac{x+1}{(x+4)(x-4)^2}$

(b) Ansatzfunktion:

$$f(x) = g(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

Näherungsfunktion:

$$g(x) = x^2 + 1$$

Polstellen:

$$q(x) = x^2 - 1$$

Damit haben wir schon:

$$f(x) = x^2 + 1 + \frac{m\,x + c}{x^2 - 1}$$

$f(0) = 16$ führt auf $c = -15$ und $f(\pm 2) = 0$ führt dann auf $m = 0$. Damit haben wir insgesamt"

$$f(x) = \frac{x^4 - 16}{x^2 - 1}$$

Abschnitt III (Ableitungen)

Lösung 8

(a)

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2-1)'\,\mathrm{e}^x + (x^2-1)\;(\mathrm{e}^x)' \\ &= 2\,x\,\mathrm{e}^x + (x^2-1)\,\mathrm{e}^x \\ &= (x^2+2\,x-1)\,\mathrm{e}^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(y) &= \frac{(y-x)'y^2-(y^2)'(y-x)}{(y^2)^2} \\ &= \frac{y^2-2\,y\,(y-x)}{y^4} \\ &= \frac{2\,x-y}{y^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v'(\alpha) &= (\mathrm{e}^\alpha)'\;\ln\alpha + \mathrm{e}^\alpha\;(\ln\alpha)' \\ &= \mathrm{e}^\alpha\;\ln\alpha + \mathrm{e}^\alpha\,\frac{1}{\alpha} \\ &= \mathrm{e}^\alpha\left(\ln\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(b) &= \left(\ln\sqrt{\sin^2 b}\right)' \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sin^s b}}\frac{1}{2}(\sin^2 b)^{-\frac{1}{2}}2\;\sin b\cos b \\ &= \frac{\sin b\;\cos b}{|\sin b|\,|\sin b|} = \frac{\cos b}{\sin b} = \cot b \end{aligned}$$

$$w'(f) = x^{-\frac{3}{4}}\,\frac{-\frac{7}{6}\,f^{-\frac{13}{6}}+1}{3}$$

$$\begin{aligned} \beta'(g) &= (g^2)'\;\tanh g + g^2\,(\tanh g)' \\ &= 2\,g\;\tanh g + g^2\left(\frac{\sinh g}{\cosh g}\right)' \\ &= 2\,g\;\tanh g + g^2\left(\frac{\mathrm{e}^g-\mathrm{e}^{-g}}{\mathrm{e}^g+\mathrm{e}^{-g}}\right)' \\ &= 2\,g\;\tanh g + g^2\,\frac{(\mathrm{e}^g+\mathrm{e}^{-g})^2-(\mathrm{e}^g-\mathrm{e}^{-g})^2}{(\mathrm{e}^g+\mathrm{e}^{-g})^2} \\ &= 2\,g\;\tanh g + g^2\,\frac{4}{\cosh^2 g} \end{aligned}$$

Lösung 9

(a)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\,f(x) &= \mathrm{e}^{\sqrt{\cos(2\,x)}}\,\frac{d}{dx}\sqrt{\cos(2\,x)} = \mathrm{e}^{\sqrt{\cos(2\,x)}}\frac{1}{2\,\sqrt{\cos(2\,x)}}\frac{d}{dx}\cos(2\,x)\\ &= \mathrm{e}^{\sqrt{\cos(2\,x)}}\frac{-2\,\sin(2\,x)}{2\,\sqrt{\cos(2\,x)}}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\varphi}\,v(\varphi) &= \frac{d}{d\varphi}\sin\sqrt{\varphi} = \frac{\pi}{180}\,\cos\sqrt{\varphi}\frac{d}{d\varphi}\sqrt{\varphi}\\ &= \frac{\pi}{180}\,\cos\sqrt{\varphi}\frac{1}{2\,\sqrt{\varphi}} = \frac{\pi\,\cos\sqrt{\varphi}}{360\,\sqrt{\varphi}}\end{aligned}$$

Lösung 10

$$\frac{d}{dx}\arcsin{(2\,x)} = 2\arcsin{}'(2\,x) = \frac{2}{\sin'(\arcsin{(2\,x)})} = \frac{2}{\cos(\arcsin{(2\,x)})} = \frac{2}{\sqrt{1-4\,x^2}}$$

Denn:

$$\begin{aligned} & \cos(\arcsin{(2\,x)}) = a && \text{überlegen Sie, dass } a > 0 \text{ gilt}\\ \Leftrightarrow\quad & \cos^2(\arcsin{(2\,x)}) = a^2\\ \Leftrightarrow\quad & \cos^2(\arcsin{(2\,x)}) + \sin^2(\arcsin{(2\,x)}) = a^2 + (2\,x)^2\\ \Leftrightarrow\quad & 1 = a^2 + 4\,x^2\\ \Leftrightarrow\quad & a = \sqrt{1-4\,x^2}\end{aligned}$$

Abschnitt IV

Lösung 11

(a) (i) Mit Substitution: $g = 1 - \cos x$, $dg = \sin x\,dx$

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}\,dx &= \int \frac{1}{\sqrt{g}}\,dg\\ &= 2\,\sqrt{g} + C = 2\,\sqrt{1-\cos x} + C\end{aligned}$$

(ii) Hier muss zwei Mal partiell integriert werden:

$$\begin{aligned}\int x^2 \cos(3\,x)\,dx &= \frac{x^2}{3}\sin(3\,x) - \frac{2}{3}\int x\,\sin(3\,x)\,dx + C \\ &= \frac{x^2}{3}\sin(3\,x) - \frac{2}{3}\left(\frac{-x}{3}\cos(3\,x) + \frac{1}{3}\int \cos(3\,x)\,dx\right) + C \\ &= \frac{x^2}{3}\sin(3\,x) - \frac{2}{3}\left(\frac{-x}{3}\cos(3\,x) + \frac{1}{9}\sin(3\,x)\right) + C \\ &= \left(\frac{x^2}{3} - \frac{2}{27}\right)\sin(3\,x) + \frac{2}{9}\,x\,\cos(3\,x) + C\end{aligned}$$

(b) (i)

$$\int_0^8 \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = 2\sqrt{1+x}\,\Big|_0^8 = 2\sqrt{9} - 2\sqrt{1} = 4$$

(ii)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}\,dx \qquad t = 1 + \sin x$$

$$\frac{dt}{dx} = \cos x$$

$$\begin{aligned}&= \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \int_1^2 t^{-\frac{1}{2}}\,dt \\ &= 2\,t^{\frac{1}{2}}\Big|_1^2 = 2\,(2^{\frac{1}{2}} - 1^{\frac{1}{2}}) = 2\,(\sqrt{2} - 1)\end{aligned}$$

(iii)

$$\int_1^4 |x-3|\,dx = \int_1^3 3 - x\,dx + \int_3^4 x - 3\,dx = \frac{5}{2}$$

(c) (i) Es lässt sich der Nenner wie folgt in Linearfaktoren zerlegen:

$$x^3 + 4\,x^2 + 5\,x + 2 = (x+1)^2(x+2)$$

Daraus ergibt sich der Ansatz für die PBZ gemäß

$$\frac{x}{x^3 + 4\,x^2 + 5\,x + 2} = \frac{x}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{x+2}\,.$$

Mit der Zuhaltemethode erhalten wir $b = -1$. Damit gilt weiter

$$\begin{aligned} \frac{x}{(x+1)^2(x+2)} &= \frac{a}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{c}{x+2} \\ \Leftrightarrow \qquad \frac{2}{(x+1)(x+2)} &= \frac{a}{x+1} + \frac{c}{x+2} \end{aligned}$$

Wieder die Zuahltemethode liefert $c = -2$ und $a = 2$. Also gilt weiter

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{x}{x^3 + 4\,x^2 + 5\,x + 2}\,dx &= 2\int_1^2 \frac{1}{x+1}\,dx - \int_1^2 \frac{1}{(x+1)^2}\,dx - 2\int_1^2 \frac{1}{x+2}\,dx \\ &= \left[\ln \frac{(x+1)^2}{(x+2)^2} + \frac{1}{x+1}\right]_1^2 = \ln \frac{9}{16} + \frac{1}{3} - \ln 49 - \frac{1}{2} \\ &= \ln \frac{81}{64} - \frac{1}{6} \approx 6.89\,10^{-2} \end{aligned}$$

(ii) Polynomdivision liefert:

$$\frac{2\,x^3 - 12\,x^2 + 20\,x - 2}{x^2 - 6\,x + 9} = 2\,x + \frac{2\,x - 2}{(x-3)^2}$$

PBZ liefert:

$$\frac{x-1}{(x-3)^2} = \frac{a}{(x-3)} + \frac{b}{(x-3)^2}$$

$b = 2$ Dann gilt:

$$\frac{1}{x-3} = \frac{a}{(x-3)}$$

Also $a = 1$

$$\begin{aligned} \int \frac{2\,x^3 - 12\,x^2 + 20\,x - 2}{x^2 - 6\,x + 9}\,dx &= \int 2\,x + 2\left(\frac{1}{(x-3)} + \frac{2}{(x-3)^2}\right)\,dx \\ &= x^2 + 2\,\ln|x-3| - \frac{4}{x-3} + C \end{aligned}$$

(d) Schnittpunkte der Graphen:

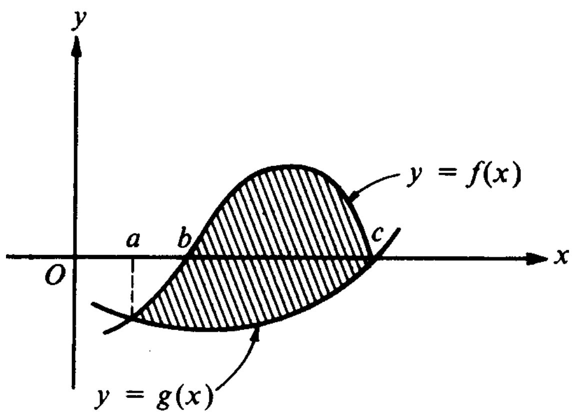
$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ \Leftrightarrow \qquad 2\,x^3 + 3\,x^2 &= x^3 + 2\,x^2 + 2\,x \\ \Leftrightarrow \qquad x^3 + x^2 - 2\,x &= 0 \\ \Leftrightarrow \qquad x(x+2)(x-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \qquad x &\in \{-2, 0, 1\} \end{aligned}$$

Die Fläche zwischen den Graphen ergibt sich dann aus dem Betrag von

$$
\begin{aligned}
F &= \int_{-2}^{0} f(x) - g(x)\,dx - \int_{0}^{1} f(x) - g(x)\,dx \\
&= \int_{-2}^{0} x^3 + x^2 - 2\,x\,dx - \int_{0}^{1} x^3 + x^2 - 2\,x\,dx \\
&= \left[\frac{1}{4}\,x^4 + \frac{1}{3}\,x^3 - x^2\right]_{-2}^{0} - \left[\frac{1}{4}\,x^4 + frac13\,x^3 - x^2\right]_{0}^{1} \\
&= -\left(\frac{1}{4}\,2^4 - \frac{1}{3}\,2^3 - 2^2\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1\right) \\
&= -\frac{17}{4} + \frac{7}{3} + 5 = \frac{1}{12}(-51 + 28 + 60) = \frac{37}{12}
\end{aligned}
$$

(e)

- ☐ $\int_a^c (|f(x)| - |g(x)|)\,dx$
- ☐ $\int_b^c f(x)\,dx - \int_a^c g(x)\,dx$
- ☐ $\int_a^c g(x) - f(x)\,dx$
- ☒ $\int_a^c f(x) - g(x)\,dx$
- ☐ $\int_a^b g(x) - f(x)\,dx + \int_b^c f(x) - g(x)\,dx$



Lösung 12

"von innen nach außen"

$$\int \left(\frac{1}{x} \int\limits_1^x \frac{du}{u} \right) \, dx = \int \left(\frac{1}{x} \left| \ln u \right|_1^x \right) \, dx$$
$$= \int \left(\frac{1}{x} \, (\ln x - \ln 1) \right) \, dx$$
$$= \int \underbrace{\frac{1}{x} \, \ln x}_{u'v} \, dx$$

partielle Integration

$$= \underbrace{\ln^2 x}_{uv} - \int \underbrace{\ln x \cdot \frac{1}{x}}_{uv'}$$
$$= \frac{1}{2} \, \ln^2 x$$

Abschnitt V

Lösung 13

(a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3\,x)}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}} = \lim_{x\to 0} 6\,\sqrt{x+2}\,\cos(3\,x) = 6\sqrt{2}$$

(b)

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) = \frac{1}{2}$$

Zunächst auf einen Bruchstrich bringen

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) = \lim_{x\to 1} \frac{x - 1 - \ln x}{(x-1)\,\ln x}$$

Das ist vom unbestimmten Typ (0/0), de l'Hôspital:

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1-\ln x)'}{((x-1)\,\ln x)'}$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\ln x + \frac{x-1}{x}}$$

Das ist immer noch vom unbestimmten Typ (0/0), also nochmal de l'Hôspital:

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)'}{\left(\ln x + \frac{x-1}{x}\right)'}$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$$

(c)

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln\left(\frac{2+h}{2}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2}{2+h}\cdot\frac{1}{2}}{1} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{2+h} = \frac{1}{2}$$

Lösung 14

Es ist der Differenzenquotient von $f(x) = x^8$ an der Stelle $x = \frac{1}{2}$:

$$\frac{d}{dx}x^8 = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^8 - (x)^8}{h} = 8\,x^7$$

Demnach ist

$$\lim_{h\to 0} \frac{\left(\frac{1}{2}+h\right)^8 - \left(\frac{1}{2}\right)^8}{h} = 8\,x^7\Big|_{x=\frac{1}{2}} = \frac{2^3}{2^7} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$$

Lösung 15

(a) Nein, denn:

$$\int_0^2 \frac{x-2}{x^2-3\,x+2}\,dx = \int_0^2 \frac{x-2}{(x-1)(x-2)}\,dx$$
$$= \int_0^2 \frac{1}{x-1}\,dx$$
$$= \lim_{\epsilon\to 0} \int_0^{1-\epsilon} \frac{1}{x-1}\,dx + \lim_{\epsilon\to 0} \int_{1+\epsilon}^{2} \frac{1}{x-1}\,dx$$
$$= \lim_{\epsilon\to 0} \ln|x-1|\Big|_0^{1-\epsilon} + \lim_{\epsilon\to 0} \ln|x-1|\Big|_{1+\epsilon}^{2}$$
$$= \lim_{\epsilon\to 0} (\ln\epsilon - \ln 1) + \lim_{\epsilon\to 0} (\ln 1 - \ln\epsilon)$$
$$= \lim_{\epsilon\to 0} \ln\epsilon - \lim_{\epsilon\to 0} \ln\epsilon$$

Die beiden Grenzwerte existieren nicht und in Folge dessen nimmt das angegebene Integral keinen Wert an.

(b)

$$
\begin{aligned}
A &= \lim_{b\to\infty} \int\limits_0^b \frac{x^2}{\mathrm{e}^{x^3}}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int\limits_0^b x^2\,\mathrm{e}^{-x^3}\,dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \frac{-1}{3} \int\limits_0^b -3\,x^2\,\mathrm{e}^{-x^3}\,dx = \lim_{b\to\infty} \frac{-1}{3} \int\limits_0^b \left(\mathrm{e}^{-x^3}\right)'\,dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \frac{-1}{3} \mathrm{e}^{-x^3}\Big|_0^b = \frac{-1}{3}\left(\lim_{b\to\infty} \mathrm{e}^{-b^3} - \mathrm{e}^0\right) \\
&= \frac{-1}{3}(0-1) = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

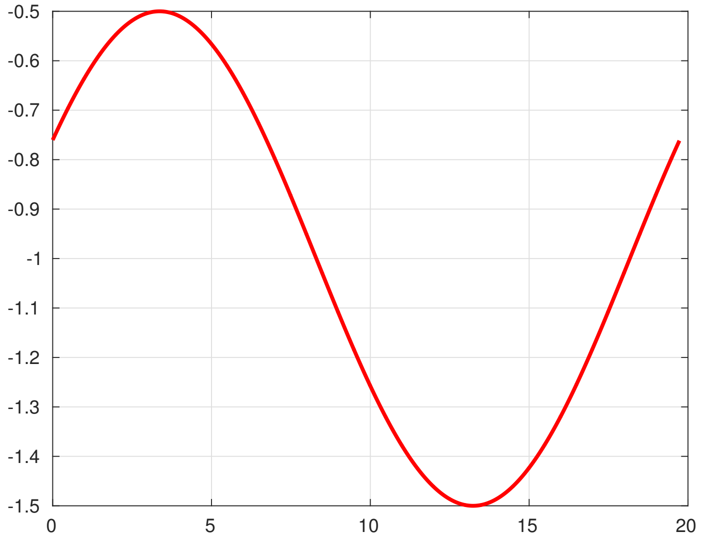
Abschnitt VI

Lösung 16

Amplitude $A = 0.5$, Kreisfrequenz $\omega = \dfrac{1}{\pi}$, Periode $P = \dfrac{2\,\pi}{\omega} = 2\,\pi^2 \approx 19.74$

und Nullphase $\varphi = \dfrac{1}{2}$

vertikale Verschiebung $= -1$, horizontale Verschiebung $= -\dfrac{\pi}{2}$



Lösung 17

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{3}\,\cos x + 3\,\sin x \\ &= \sqrt{3}\,\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 3\,\sin x \end{aligned}$$

Die Amplitude von f ist gegeben durch

$$A = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 3^2} = 2\sqrt{3}$$

Lösung 18

Der Bewegungsablauf $u(t) = A\,\sin(\omega\,t + \varphi)$ eines harmonischen Oszillators genügt der Gleichung

$$\begin{aligned} u'' + \omega^2\,u &= 0 \\ u'(0) &= 0 \\ u(0) &= A \end{aligned}$$

(a) Egal welchen Wert die Startauslenkung und -geschwindigkeit haben, die Kreisfrequenz ω bleibt unberührt und demnach auch die Periode.

$$\square\,2 \qquad \square\,\frac{1}{2} \qquad \boxtimes\,1 \qquad \square\,\frac{1}{4}$$

(b) Die maximale Geschwindigkeit herrscht dort, wo $\cos(\omega\,t + \varphi)$ den Wert 1 annimt und beträgt dort $\omega\,A$. Wird A verdoppelt, so verdoppelt sich auch die Geschwindigkeit. Anders kann man sagen, wenn die Periode und damit auch die (Kreis-)Frequenz gleich gleibt, der Weg sich aber vedoppelt, muss sich auhc die Geschwindigkeit verdoppeln, also

$$\boxtimes\,2 \qquad \square\,\frac{1}{2} \qquad \square\,1 \qquad \square\,\frac{1}{4}$$

Abschnitt VII

Lösung 19

1. Schritt: Graph, der das Glas beschreibt berechnen:

$$\begin{aligned} & & f(5) &= 3 \\ &\Leftrightarrow & 5^4 + b\,5^2 &= 3^3 \cdot 200 \\ &\Leftrightarrow & b &= 3^3 \cdot 8 - 5^2 = 191 \\ &\Rightarrow & f(x) &= \frac{1}{1800}\left(x^4 + 191\,x^2\right) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

2. Schritt: Umkehrabbildung $p(x)^{-1}$ berechnen:

$$
\begin{aligned}
& & x^4 + 191\,x^2 &= 1800y \\
&\Leftrightarrow & (x^2 + \frac{191}{2})^2 &= 1800y + \frac{191^2}{4} \\
&\Leftrightarrow & x^2 &= \sqrt{1800y + \frac{191^2}{4}} - \frac{191}{2} \\
&\Rightarrow & p^{-1}(x)^2 &= \sqrt{1800x + \frac{191^2}{4}} - \frac{191}{2}
\end{aligned}
$$

3. Schritt: Volumenberechnung:

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^3 p^{-1}(x)^2 \, dx \\
&= \pi \int_0^3 \sqrt{1800x + \frac{191^2}{4}} - \frac{191}{2} \, dx \\
&= \pi \left(\left[\frac{2}{3} \sqrt{1800x + \frac{191^2}{4}}^3 \frac{1}{1800} \right]_0^3 - \frac{191 \cdot 3}{2} \right) \\
&= \pi \left(\left(\frac{2}{3} \sqrt{1800 \cdot 3 + \frac{191^2}{4}}^3 \frac{1}{1800} \right) - \left(\frac{2}{3} \sqrt{\frac{191^2}{4}}^3 \frac{1}{1800} \right) - \frac{191 \cdot 3}{2} \right) \\
&= \pi\,(648.03337963 - 322.58662037 - 286.5) = \pi \cdot 38.94675926 = 122.354852772
\end{aligned}
$$

Das Glas beinhaltet ca. 122.35 ml Cognac.

Abschnitt VIII

Lösung 20

$$
\begin{aligned}
f^{(0)}(x) &= \sqrt[3]{\cos(2\,x)} & f^{(0)}(\pi) &= 1 \\
f^{(1)}(x) &= \frac{-2}{3} \frac{\sin(2\,x)}{\sqrt[3]{\cos(2\,x)}^2} & f^{(1)}(\pi) &= 0 \\
f^{(2)}(x) &= \frac{-8}{9} \frac{\sin^2(2\,x)}{\cos^{\frac{5}{3}}(2\,x)} - \frac{4}{3} \cos^{\frac{1}{3}}(2\,x) & f^{(2)}(\pi) &= -\frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich das Taylorpolynom:

$$\begin{aligned} T_{f,\pi}(x) &= \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}}{k!}(x-\pi)^k \\ &= \frac{f^{(0)}}{0!}(x-\pi)^0 + \frac{f^{(1)}}{1!}(x-\pi)^1 + \frac{f^{(2)}}{2!}(x-\pi)^2 \\ &= 1 - \frac{2}{3}(x-\pi)^2 \end{aligned}$$

Lösung 21

(a) Es ist

$$a_n = \frac{1}{3^n - 2^n} \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \frac{1}{3^{n+1} - 2^{n+1}} .$$

Damit gilt

$$\varrho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{3^n - 2^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\cancel{3^n}\left(3 - 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{\cancel{3^n}\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}\right| = \left|\frac{(3-2\cdot 0)}{(1-0)}\right| = 3$$

(b)

$$[-1, 5)$$

Abschnitt IX

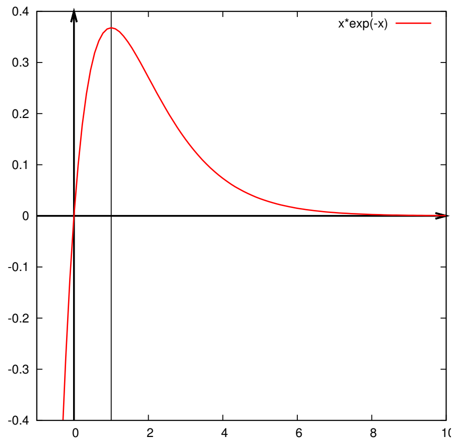
Lösung 22

$$\begin{aligned} f(x) &= x - \frac{k}{x} & & \\ f'(x) &= 1 + \frac{k}{x^2} & \Rightarrow \quad & f'(-2) = 1 + \frac{k}{4} = 0 \\ & & \Leftrightarrow \quad & k = -4 \\ f''(x) &= \frac{-2\,k}{x^3} & \Rightarrow \quad & f''(-2) < 0 \end{aligned}$$

$\boxed{x - \frac{k}{x} \text{ hat für } k = -4 \text{ bei } x = -2 \text{ ein lokales Maximum.}}$

Lösung 23

Für die Skizze:



$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0\,,\ f(0) = 0\,,\ \lim_{x\to-\infty} f(x) - \infty$$

Extrema:

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - x\,\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(1-x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$$

$$f''(x)\big|_{x=1} = -\mathrm{e}^{-x}(2-x)\big|_{x=1} = -\frac{1}{\mathrm{e}} < 0$$

Also erhalten wir für ein lokales Maximum an der Stelle $(1, f(1)) = (1, \mathrm{e}^{-1})$.

Jetzt der Flächeninhalt:

$$\begin{aligned}
\lim_{c\to\infty} \int_0^c x\,\mathrm{e}^{-x}\,dx &= \lim_{c\to\infty}\left(\left[-x\,\mathrm{e}^{-x}\right]_0^c + \int_0^c \mathrm{e}^{-x}\,dx\right)\\
&= -\lim_{c\to\infty}\left[(1+x)\,\mathrm{e}^{-x}\right]_0^c\\
&= -\lim_{c\to\infty}\left((1+c)\,\mathrm{e}^{-c} - 1\right)\\
&= 1
\end{aligned}$$

Abschnitt X

Lösung 24

Abstand von P zum Graphen f:

$$g(x) := \left|\begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(x-a)^2 + x^4} = \sqrt{x^4 + x^2 - 2\,a\,x + a^2}$$

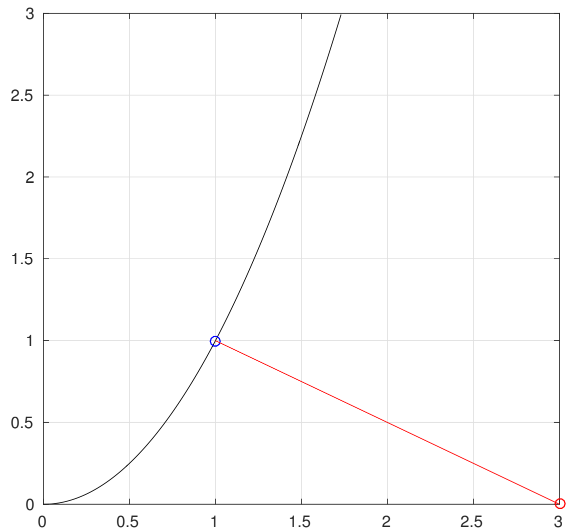
Um das Minimum zu berechnen, können wir auch das Minimum von $g^2(x)$ berechnen. Wir suchen also das Minimum von

$$\frac{d}{dx} x^4 + x^2 - 2\,a\,x + a^2 = 4\,x^3 + 22\,a = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad a = 2\,x^3 + 1$$

Für $x = 1$ gilt dann

$$\Rightarrow \qquad a = 3$$



Lösung 25

Höhe der Rinne: $h = \sqrt{4 - x^2}$, $x \in [-2, 2]$

Fläche:

$$F(x) = h \cdot (x + 2) = \sqrt{4 - x^2}\,(x + 2)$$

$$F'(x) = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}(x + 2) + \sqrt{4 - x^2}\,, \; x \in (-2, 2)$$

$F'(x) = 0$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \qquad & \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}(x + 2) = \sqrt{4 - x^2} \\
\Leftrightarrow \qquad & x\,(x + 2) = 4 - x^2 \\
\Leftrightarrow \qquad & x^2 + x - 2 = 0 \\
\Rightarrow \qquad & x \in \{-2, 1\}
\end{aligned}$$

Der Rinnenquerschnitt hat für $x = 1$ dm maximalen Flächeninhalt $F(1) = 3\,\sqrt{3}$ dm^2.

Lösung 26

$$\begin{aligned}
f(x) &= 30\,\cosh\left(\frac{1}{30}\,x-1\right)-25\\
&= 15\,\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{30}\,x-1}+\mathrm{e}^{-\frac{1}{30}\,x+1}\right)-25\\
f'(x) &= \sinh\left(\frac{1}{30}\,x-1\right)\\
&= \frac{1}{2}\,\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{30}\,x-1}-\mathrm{e}^{-\frac{1}{30}\,x+1}\right)\\
f''(x) &= \frac{1}{30}\,\cosh\left(\frac{1}{30}\,x-1\right)\\
&= \frac{1}{60}\,\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{30}\,x-1}+\mathrm{e}^{-\frac{1}{30}\,x+1}\right)
\end{aligned}$$

(a) Höhe der Pfeiler:

links

$$f(0)=15\,\left(\mathrm{e}^{-1}+\mathrm{e}^{+1}\right)-25\approx 21.29$$

rechts

$$f(50)=15\,\left(\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}+\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}}\right)-25\approx 11.92$$

(b) Steigung des Seiles in den beiden Aufhängepunkten:

links

$$f'(0)=\frac{1}{2}\,\left(\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{1}\right)\approx -1.18$$

rechts

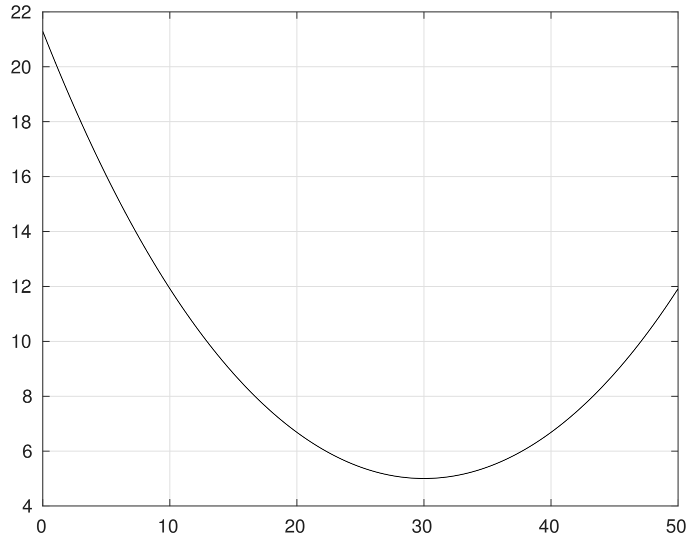
$$f'(50)=\frac{1}{2}\,\left(\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}-\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}}\right)\approx 0.72$$

(c) Das Seil muss also an der Tiefsten Stelle noch wenigestens 3 m über dem Boden sein. Extremum:

$$\begin{aligned}
&& f'(x) &= \frac{1}{2}\,\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{30}\,x-1}-\mathrm{e}^{-\frac{1}{30}\,x+1}\right)=0\\
\Leftrightarrow && \frac{1}{30}\,x-1 &= -\frac{1}{30}\,x+1\\
\Leftrightarrow && x &= 30\\
&& f''(30) &> 0\\
&& f(30) &= 5
\end{aligned}$$

f hat bei $x = 30$ ein lokales Minimum und das Seil ist an dieser Stelle noch 5 m über dem Erdboden.

(d)



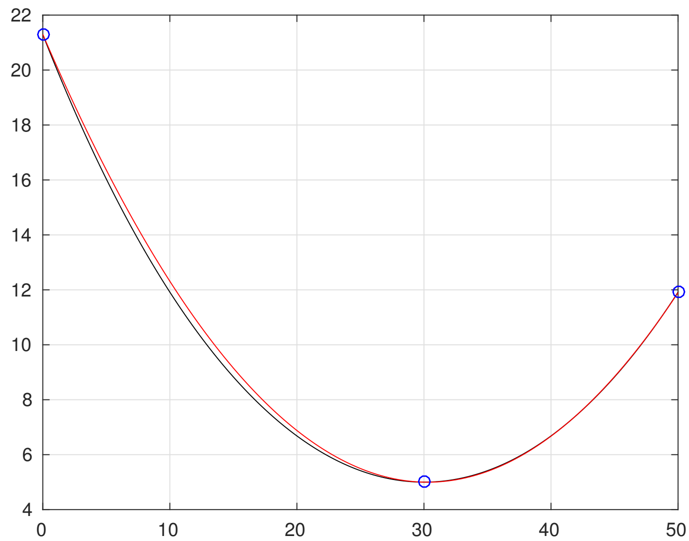
(e) Lagrange-Polynom durch die Punkte

$$P_1 = (0, 21.29)\,, \; P_2 = (30, 5) \quad \text{und} \quad P_3 = (50, 11.92)$$

ist durch

$$p(x) = \frac{533}{30000}\,x^2 - \frac{3229}{3000}\,x + 21.3$$

gegeben.



(f) Mittlerer Fehler links:

$$\frac{1}{30}\int\limits_0^{30} f(x) - p(x)\,dx = \frac{1}{30}\left(F(x) - P(x)\right|_0^{30}$$
$$= \frac{1}{30}\left(900\,\sinh\left(\frac{x}{30} - 1\right) - 25\,x - \frac{1}{90000}\left(x\left(533\,x^2 - 48435\,x + 1917000\right)\right)\right)$$
$$= \frac{1}{30}\left(450\,\mathrm{e} - 450\,\mathrm{e}^{-1} - \frac{21291}{20}\right) \approx -0.23$$

analog der rechte Teil:

$$\frac{1}{20}\int\limits_{30}^{50} f(x) - p(x)\,dx = 45\,\sinh\left(\frac{2}{3}\right) - \frac{29039}{900} \approx 0.0066$$