School of Engineering
Winterthur
Zürcher Hochschule für Angewandte Wissenschaften

Blatt 12: bestimmte Integration von Polynomen **MAE 1**

Aufgabe 1

Berechnen Sie folgende Integrale:

$$(a)\ \int_{-1}^{1} 4\,x^3 - 3\,x^2 + 2\,x - 1\,dx \qquad (b)\ \int_{0}^{1} x^2 + 4\,\sqrt{x}\,dx \qquad (c)\ \int_{1}^{2} \frac{1}{x^2} + x\,dx$$

Lösung auf Seite 2

Aufgabe 2

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der Funktion

$$f(x) = x^2 - 1$$

und der x-Achse über dem Intervall $[-2, 2]$ umfasst wird. Lösung auf Seite 2

Aufgabe 3

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die zwischen den beiden Graphen

$$f(x) = x^2 - 1 \qquad \text{und} \qquad g(x) = 2 - x - x^2$$

eingeschlossen wird. Lösung auf Seite 2

Aufgabe 4

Wie muss $a \in \mathbb{R}^+$ gewählt werden, damit

$$\int_{0}^{a} x^3 - x\,dx = 1$$

gilt? Lösung auf Seite 3

Aufgabe 5

Ein Auto und ein Motorrad befahren die gleiche Strecke. Ihr Geschwindigkeitsverlauf kann innerhalb einer Stunde mit

$$v_A = 100\,t + 20 \quad \text{und} \quad v_M = 160\,t\,, \qquad t \in [0, 1]$$

beschrieben werden. Es ist $[t]$ =h und $[v]$ =km/h. Skizzieren Sie die Geschwindigkeitsgraphen in ein Achsenkreuz. Zeichnen Sie eine vertikale Linie durch eine variable Stelle a auf der x-Achse. Interpretieren Sie den Flächeninhalt, der von dieser vertikalen Linie ($x = a$), der y-Achse und den beiden Graphen v_A und v_M eingeschlossen wird. Können Sie eine Aussage darüber treffen, ob und welches Fahrzeug von dem jeweils anderen überholt wird? Lösung auf Seite 3

Lösung 1

$$(a) \quad \int_{-1}^{1} 4\,x^3 - 3\,x^2 + 2\,x - 1\;dx = x^4 - x^3 + x^2 - x\Big|_{-1}^{1}$$

$$= (1 - 1 + 1 - 1) - (1 + 1 + 1 + 1) = -4$$

$$(b) \quad \int_{0}^{1} x^2 + 4\,\sqrt{x}\;dx = \frac{1}{3}\,x^3 + \frac{8}{3}\,\sqrt{x}^3\Big|_{0}^{1} = 3$$

$$(c) \quad \int_{1}^{2} \frac{1}{x^2} + x\;dx = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\,x^2\Big|_{1}^{2} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,2^2\right) - \left(-1 + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

Lösung 2

Berechnen Sie zunächst die Nullstellen, um Bereiche zu ermittlen, wo die Funktionswerte positiv und wo negativ sind:

$$f(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)\,,\;\; f(x) < 0 \text{ falls } x \in (-1, 1)$$

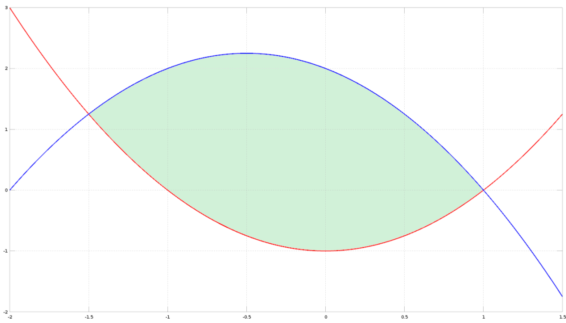
Die Funktion ist gerade, d.h. es genügt, von 0 bis 2 zu integrieren und dann das Ergebnis zu verdoppeln. Der Flächeninhalt A ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned}
A &= 2\left(\int_{1}^{2} x^2 - 1\;dx - \int_{0}^{1} x^2 - 1\;dx\right)\\
&= 2\left(\left(\frac{1}{3}\,x^3 - x\Big|_{1}^{2}\right) - \left(\frac{1}{3}\,x^3 - x\Big|_{0}^{1}\right)\right)\\
&= 2\left(\left(\frac{1}{3}\,2^3 - 2\right) - 2\left(\frac{1}{3} - 1\right)\right)\\
&= 2\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3}\right) = 4
\end{aligned}$$

Lösung 3

Wir benötigen zunächst die Schnittpunkte der beiden Graphen:

$$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad 2\,x^2 + x - 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x \in \left\{-\frac{3}{2}, 1\right\}$$



Den gesuchten Flächeninhalt erhalten wir dann durch Integration über die Differenz der beiden Funktionen von $-\frac{3}{2}$ bis 1:

$$\left|\int_{-\frac{3}{2}}^{1} 2\,x^2 + x - 3\,dx\right| = \left|\frac{2}{3}\,x^3 + \frac{1}{2}\,x^2 - 3\,x\Big|_{-\frac{3}{2}}^{1}\right|$$
$$= \left|\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 3\right) - \left(-\frac{9}{4} + \frac{9}{8} + \frac{27}{2}\right)\right| \approx |-14.21| = 14.21$$

Lösung 4

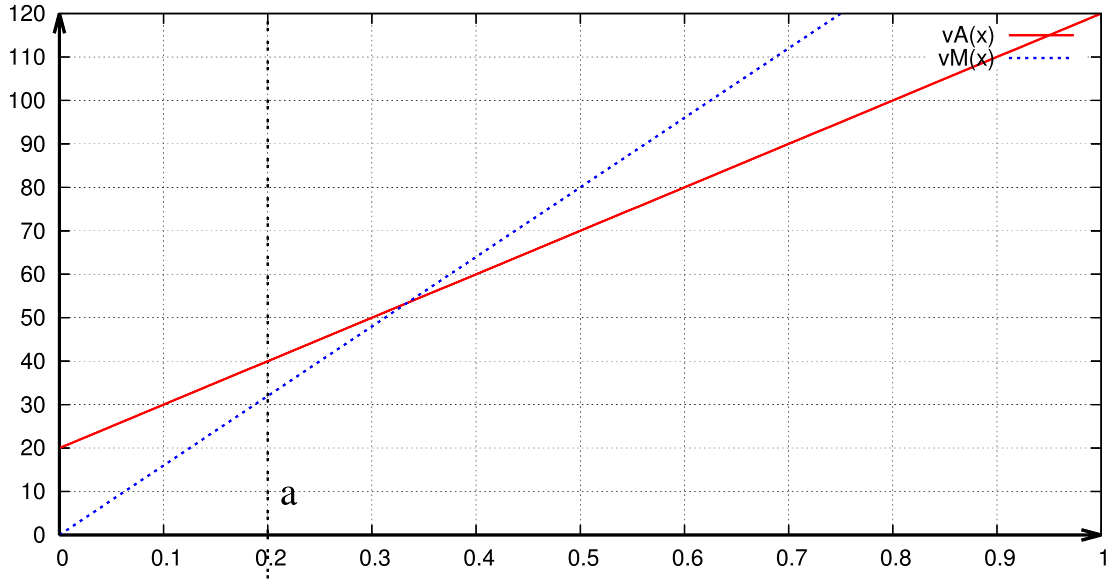
$$\int_0^a x^3 - x\,dx = \frac{1}{4}\,x^4 - \frac{1}{2}\,x^2\Big|_0^a$$
$$= \frac{1}{4}\,a^4 - \frac{1}{2}\,a^2$$
$$= 1$$
$$\Leftrightarrow \qquad a^4 - 2\,a^2 - 4 = 0$$

Substitution: $b := a^2$

$$\Leftrightarrow \qquad b^2 - 2\,b - 4 = 0 \qquad \Rightarrow \quad b \in \{1 + \sqrt{5}, \underbrace{1 - \sqrt{5}}_{<0}\}$$

$$\Rightarrow \qquad a = \sqrt{1 + \sqrt{5}}$$

Lösung 5



Wir gehen davon aus, dass sich beide Fahrzeuge zum Startzeitpunkt am gleichen Ort befanden. Es ist dann

$$\int_0^1 v_A\,dt = A(a) - A(0) \qquad \text{gefahrene km des Autos zum Zeitpunkt } t = a$$

$$\int_0^1 v_M\,dt = M(a) - M(0) \qquad \text{gefahrene km des Motorrads zum Zeitpunkt } t = a$$

$$\int_0^1 v_A - v_M\,dt = A(a) - M(a) \qquad \text{Abstand vom Auto zum Motorrad} \tag{1}$$

Zum dem Zeitpunkt, an dem die Geraden sich schneiden haben beide Fahrzeuge die gleiche Geschwindigkeit. Das Motorrad überholt das Auto sobald das Integral (1) verschwindet. Das ist auf jeden Fall rechts vom Schnittpunkt der Geschwindigkeitsgraphen.