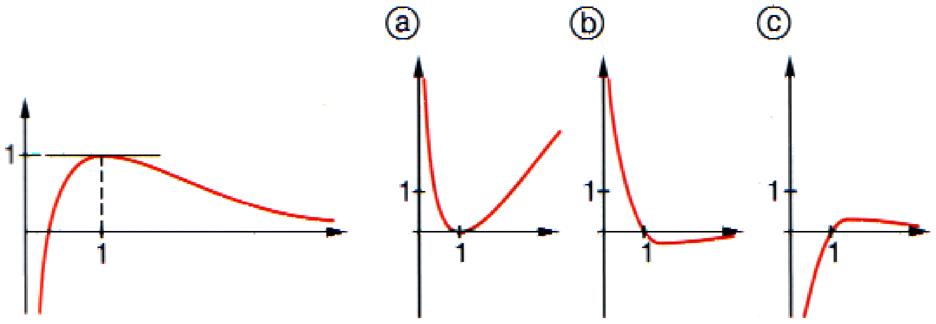
School of Engineering
Winterthur
Zürcher Hochschule für Angewandte Wissenschaften

Blatt 10: Ableitungen von Polynomen MAE 1

Aufgabe 1

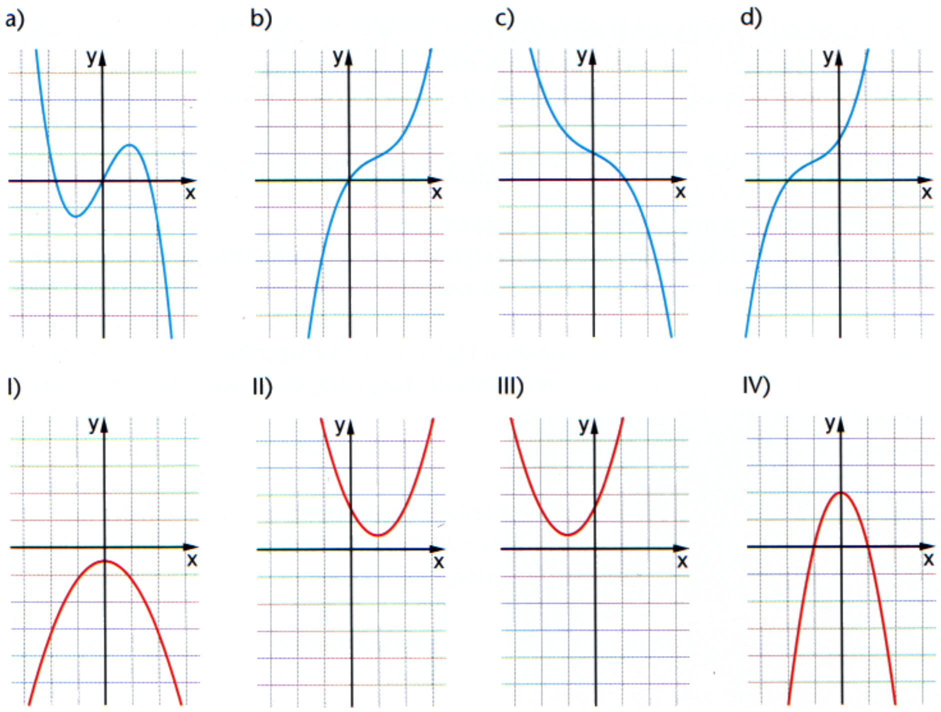
Welcher der Grafen a, b oder c ist der Graf zur passenden Steigungsfunktion zu dem links abgebildeten Funktionsgrafen?



Lösung auf Seite 5

Aufgabe 2

In der ersten Zeile sind die Grafen von vier Funktionen und in der zweiten Zeile die zugehörigen Steigungsgraphen gezeichnet. Ordnen Sie richtig zu.



Lösung auf Seite 5

Aufgabe 3

Warum gilt die Quotientenregel

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}\ ?$$

Bilden Sie den Differenzenquotienten für $\frac{f}{g}$ und verwenden Sie die jeweiligen für f und g.

Lösung auf Seite 5

Aufgabe 4

Differenzieren Sie folgende Funktionen:

(a)	$f(x) = 2x^5 - 4x^3$	(b)	$u(r) = (r+1)^2$
(c)	$v(t) = 2(3t^2+1)^3$	(d)	$g(s) = (3s^2+s)(4s-1)$

Lösung auf Seite 5

Aufgabe 5

Differenzieren Sie folgende Funktionen:

(a)	$f(y) = \dfrac{y^2+y}{3y-1}$	(b)	$g(b) = \dfrac{5b^5-2a^2+b}{3ab-b^2}$	(c)	$f(x) = \dfrac{\|x\|}{x}$
(d)	$a(x) = \dfrac{10}{x^3+5}$	(e)	$\gamma(\alpha) = \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{\alpha^3-\alpha}$	(f)	$\beta(c) = \dfrac{\|c+1\|}{c^2}$

Lösung auf Seite 5

Aufgabe 6 Freier Fall

Der freie Fall eines Steins aus 80 m Höhe wird durch die Funktionsgleichung

$$f(t) = 80 - 5t^2 \qquad (t \text{ in sec und } f(t) \text{ in m})$$

modelliert.

(a) Nach welcher Zeit trifft der Stein auf dem Boden auf?

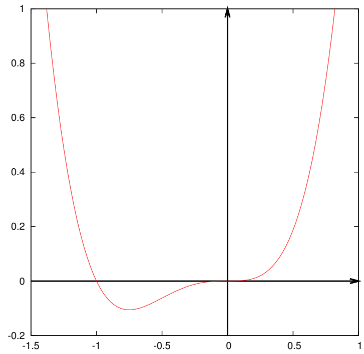
(b) Bestimme die Durchschnittsgeschwindigkeit des gesamten Falls.

(c) In welcher Höhe befindet sich der Stein nach 1 sec, 2 sec und 3 sec?

(d) Mit welcher Geschwindigkeit trifft der Stein auf der Erde auf?

Lösung auf Seite 6

Aufgabe 7



Untersuchen Sie einmal die Funktion

$$p(x) = x^4 + x^3$$

auf all ihre (möglichen) Extrema. (Siehe Abbildung rechts.)

Lösung auf Seite 6

Aufgabe 8 Brückenbau II

Die Brücke aus der Vorlesung soll verbessert werden. Die Auffahrt auf die Brücke soll "glatt", das heißt ohne Ecken (in der Seitenaufsicht) sein. Mit welchem Polynom kann dieser verbesserte Brückenverlauf beschrieben werden?

Lösung auf Seite 7

Aufgabe 9 Viganella (Minima und Maxima von Polynomen)

Ein Tal in den Bergen wird nach Westen von einer steilen Felswand, nach Osten von einem flachen Höhenzug begrenzt. Der Querschnitt des Geländes wird beschrieben durch das Schaubild der Funktion

$$f(x) = -0.125x^3 + 0.75x^2 - 3.125 \qquad \text{für } -2.5 \leq x \leq 5\,.$$

Dabei weist die positive x–Achse nach Osten (1 LE entspricht 100 m).

1. Skizzieren Sie den Querschnitt des Geländes. Dazu gehört:
   (a) Auswerten der Funktion an den Intervallgrenzen und bei 0
   (b) Berechnung der Nullstellen.
   (c) Berechnung der Extrema. (Dazu f' und f" verwenden)
2. Wo ist die östliche Talseite am steilsten? An welcher Stelle ist die westliche Seite gleich steil?
3. In der Talsohle befindet sich ein Dorf, das bereits nachmittags im Schatten liegt. Nach dem Vorbild des italienischen Ortes Viganella soll auf dem höchsten Punkt des Höhenzugs östlich des Dorfes ein Gerüst mit einem drehbaren Spiegel zur Reflexion von Sonnenlicht aufgestellt werden. Auch hier wird der Querschnitt des Geländes durch das Schaubild der Funktion f beschrieben.

(a) Bestimmen Sie die Mindesthöhe dieses Gerüsts, bei der das Sonnenlicht den tiefsten Punkt des Geländequerschnitts erreichen kann.

(b) Wie hoch müsste das Gerüst werden, damit der gesamte Geländequerschnitt zwischen Dorf und Gerüst beleuchtet werden kann?

4. Quer zum Tal befindet sich in Ost–West–Richtung eine Staumauer. Vom tiefsten Punkt des Tals aus gemessen ist sie 312.5 m hoch.

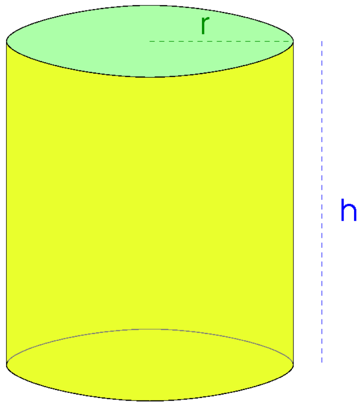
   (a) Berechnen Sie die breite der Staumauer an ihrer Oberkante.

   (b) Bevor das Wasser aufgestaut wird, muss die dem See zugewandte Seite der Staumauer versiegelt werden. Schätzen Sie den Inhalt dieser Fläche.

Lösung auf Seite 8

Aufgabe 10 Produktionsoptimierung

Für eine Sonderaktion einer Getränkefirma sollen Dosen hergestellt werden, die $256\,cm^3$ Flüssigkeit fassen. Bei der Dosenfertigung soll selbstverständlich möglichst wenig Blech verbraucht werden.
Wie groß müssen dazu Radius und Höhe der Dose sein? (Siehe Abbildung)



Lösung auf Seite 11

Aufgabe 11 Tangentengleichung

Berechnen Sie die Tangente $T_f(x)$ an

$$f(x) = x^2$$

im Punkt $(0.5, f(0.5))$ analytisch und fertigen Sie eine Skizze an.

Lösung auf Seite 12

Aufgabe 12 Geradengleichung

Bestimmen Sie die Geradengleichung für die Gerade, die durch

1. den Punkt $(-1, 3)$ verläuft und die Steigung -2 hat,
2. die beiden Punkte $(-1, -1)$ und $(5, 2)$ verläuft,
3. den Punkt $(4, 2)$ verläuft und die y–Achse bei 1 schneidet.

Lösung auf Seite 13

Lösung 1

$$b$$

Lösung 2

$$\begin{aligned}
a &\leftrightarrow IV \\
b &\leftrightarrow II \\
d &\leftrightarrow III \\
c &\leftrightarrow I
\end{aligned}$$

Lösung 3

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} &= \frac{f(x+h)\,g(x) - f(x)\,g(x+h)}{h\,g(x+h)\,g(x)} \\
&= \frac{f(x+h)\,g(x) - f(x)\,g(x) + f(x)\,g(x) - f(x)\,g(x+h)}{h\,g(x+h)\,g(x)} \\
&= \frac{\frac{f(x+h)\,g(x) - f(x)\,g(x)}{h} + \frac{f(x)\,g(x) - f(x)\,g(x+h)}{h}}{g(x+h)\,g(x)} \\
&= \frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{h} g(x) + f(x)\frac{g(x)-g(x+h)}{h}}{g(x+h)\,g(x)} \\
&\to \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \qquad (h \to 0)
\end{aligned}$$

Lösung 4

$$\begin{array}{llll}
(a) & f'(x) = \dfrac{d}{dx} f(x) = 10x^4 - 12x^2 & (b) & u'(r) = \dfrac{d}{dr} u(r) = 2(x+1) \\
(c) & v'(t) = \dfrac{d}{dt} v(t) = 36(3t^2+1)^2 t & (d) & g'(s) = \dfrac{d}{ds} g(s) = 36s^2 + 2s - 1
\end{array}$$

Lösung 5

$$
\begin{array}{llll}
(a) & \dfrac{d}{dy}f(y)=\dfrac{3y^2-2y-1}{(3y-1)^2} & (b) & \dfrac{d}{db}g(b)=\dfrac{60b^5a-15b^6+b^2+6a^3-4a^2b}{b^2(3a-b)^2} \\
(c) & \dfrac{d}{dx}f(x)=\dfrac{\mathrm{sig}(x)x-|x|}{x^2} & (d) & \dfrac{d}{dx}a(x)=\dfrac{-30x^2}{(x^3+5)^2} \\
(e) & \dfrac{d}{d\alpha}\gamma(\alpha)=\dfrac{-1}{(\alpha-1)^2} & (f) & \dfrac{d}{dc}\beta(c)=\dfrac{\mathrm{sig}(c+1)c-2|c+1|}{c^3} \\
 & & & \qquad\quad =-\mathrm{sig}(c+1)\dfrac{c+2}{c^3}
\end{array}
$$

Dabei ist

$$
\mathrm{sig}(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x>0 \\ 0 & \text{für } x=0 \\ -1 & \text{für } x<0 \end{cases} .
$$

Zu beachten ist aber, dass in unseren Fällen $x \neq 0$ ist. Im Fall $x \neq 0$ gilt dann $|x| = \mathrm{sig}(x)\, x$. Die Funktion $\mathrm{sig}(x)$ stellt dann nur noch eine Zahl dar, nämlich -1 oder 1. Es gilt dann

$$
|x|' = \mathrm{sig}(x)\,, \; x \neq 0\,.
$$

Lösung 6

(a) Der Stein trifft nach 4 Sekunden auf dem Boden auf.

(b) Die Durchschnittsgeschwindigkeit des gesamten Falls beträgt $20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

	sec		
	1	2	3
h	75	60	35

(c)

(d) Der Stein trifft mit $40\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ auf der Erde auf.

Lösung 7

$$\begin{aligned} & p(x) = x^4 + x^3 \\ \Rightarrow \qquad & p'(x) = 4\,x^3 + 3\,x^2 \\ & = x^2(4\,x + 3) \end{aligned}$$

$$p'(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 0 \quad \vee \quad x = \frac{-3}{4}$$

$$\begin{aligned} & p''(x) = 12\,x^2 + 6\,x \\ \Rightarrow \qquad & p''\left(\frac{-3}{4}\right) = \frac{9}{4} > 0 \end{aligned}$$

Es liegt also bei $x = \frac{-3}{4}$ ein lokales Minimum vor. Was aber ist bei $x = 0$?

$$\begin{aligned} p(x) &= x^4 + x^3 & & \\ p'(x) &= 4\,x^3 + 3\,x^2 & p'(0) &= 0 \\ p''(x) &= 12\,x^2 + 6\,x & p''(0) &= 0 \\ p^{(3)}(x) &= 24\,x + 6 & p^{(3)}(0) &= 6 \\ p^{(4)}(x) &= 24 & p^{(4)}(0) &= 24 \\ p^{(5)}(x) &= 0 & & \end{aligned}$$

Die gesuchte Ordnung ist $n = 4$, was eine gerade Zahl ist und in folge dessen liegt bei $x = 0$ kein Extremum vor.

Das Polynom

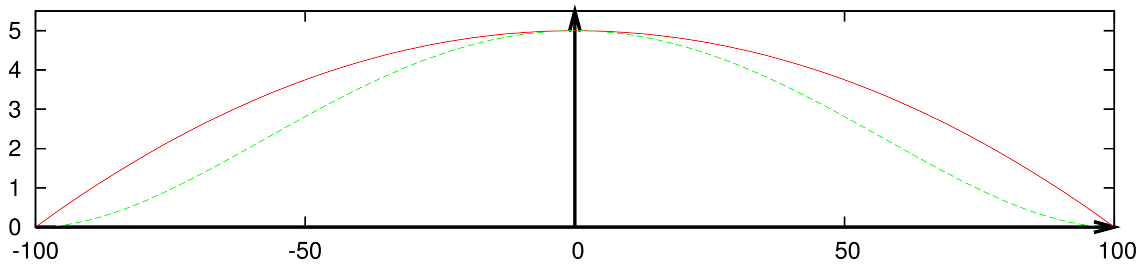
$$p(x) = x^4 + x^3$$

hat ein lokales Minimum bei

$$\left(\frac{-3}{4}, p\left(\frac{-3}{4}\right)\right) = \left(\frac{-3}{4}, \frac{9}{4}\right) .$$

Lösung 8

$$p(x) = \frac{1}{2}10^{-7}x^4 - 10^{-3}x^2 + 5$$



Lösung 9

1. (a) $f(-2.5) = \frac{225}{64}$ und $f(5) = 0$.

   (b) Die Nullstellen sind $\{5, \frac{1}{2}(1 + \sqrt{21}), \frac{1}{2}(1 - \sqrt{21})\}$

   (c) f' und f'' berechnen:

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{25}{8} \\ f'(x) &= -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{2}x \\ f''(x) &= -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

   Erst Berechnen für welche x gilt: $f'(x) = 0$ und dann prüfen, wie sich an den entsprechenden Nullstellen die zweite Ableitung verhält.

   Extrema: Die Funktion $f(x)$ hat ein Minimum bei $x = 0$ und ein Maximum bei $x = 4$.

2. Die östliche Talseite ist bei $P = (2, -\frac{9}{8})$ am steilsten und hat dort eine Steigung von $\frac{3}{2}$. Berechnung: Gesucht ist x, an welchem die Ableitung f' maximal ist. Also muss man $f''(x) = 0$ nach x auflösen und mit f''' prüfen, ob der berechnete Wert ein Maximum oder Minimum ist.

   Gleichsteil ist die Westseite am Punkt $Q = (2(1-\sqrt{2}), -\frac{9}{8}-\sqrt{2})$. Berechnung: Gesucht ist x mit $f'(x) = -\frac{3}{2}$!

3. Unser tiefster Punkt im Grafen befindet sich bei $y = -3.125$. Das sind gerade 312.5 m bis zur x–Achse. Die Oberkante der Staumauer befindet sich also gerade bei $y = 0$, bzw. direkt auf der x–Achse.

   (a) Die Länge der Staumauer erhält man dann durch die Differenz der Nullstellen $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{21})$ und $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{21})$:

$$458 \text{ m}$$

(b) Fläche der Staumauer: ($a := \frac{1}{2}(1-\sqrt{21})$, $b := \frac{1}{2}(1+\sqrt{21})$)

$$\begin{aligned}
-\int\limits_a^b f(x)\,dx &= \int\limits_a^b \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{25}{8}\,dx \\
&= \left[\frac{1}{32}x^4 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{25}{8}x\right]_a^b \\
&= \frac{1}{32}\left[x^4 - 8x^3 + 100x\right]_a^b \\
&= \frac{1}{32}\big((b^4 - 8b^3 + 100b) - (a^4 - 8a^3 + 100a)\big) \\
&= \frac{1}{32}(b^4 - a^4) - 8(b^3 - a^3) + 100(b-a)) \\
&= \circledast
\end{aligned}$$

Eine kleine Zwischenrechnung (Binomische Formel!) liefert:

$$\begin{aligned}
b^4 &= \frac{1}{16}\left(1+\sqrt{21}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(1 + 4\sqrt{21} + \cdot 21 + 4\sqrt{21}^3 + 21^2\right) \\
&= \frac{1}{16}\left(568 + 88\sqrt{88}\right)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
a^4 &= \frac{1}{16}\left(1-\sqrt{21}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(1 - 4\sqrt{21} + 6\cdot 21 - 4\sqrt{21}^3 + 21^2\right) \\
&= \frac{1}{16}\left(568 - 88\sqrt{88}\right)
\end{aligned}$$

woraus sich

$$b^4 - a^4 = \frac{1}{16}\left(568 + 88\sqrt{88}\right) - \frac{1}{16}\left(568 - 88\sqrt{88}\right) = 11\sqrt{21}$$

ergibt. Genauso

$$\begin{aligned}
b^3 &= \frac{1}{8}\left(1+\sqrt{21}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(1 + 3\sqrt{21} + 3\cdot 21 + \sqrt{21}^3\right)^3 \\
&= \frac{1}{8}\left(67 + 24\sqrt{21}\right) \\
a^3 &= \frac{1}{8}\left(1-\sqrt{21}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(1 - 3\sqrt{21} + 3\cdot 21 - \sqrt{21}^3\right)^3 \\
&= \frac{1}{8}\left(67 - 24\sqrt{21}\right)
\end{aligned}$$

woraus sich

$$b^3 - a^3 = \frac{1}{8}\left(67 + 24\sqrt{21}\right) - \frac{1}{8}\left(67 - 24\sqrt{21}\right) = 6\sqrt{21}$$

ergibt. Die neuen Erkenntnisse bauen wir in unseren Ausdruck $\circledast$ ein und es geht weiter mit:

$$\begin{aligned}
\circledast &= \frac{1}{32}(b^4 - a^4) - 8(b^3 - a^3) + 100(b - a)) \\
&= \frac{1}{32}(11\sqrt{21} - 48\sqrt{21} + 100\sqrt{21}) \\
&= \frac{63}{32}\sqrt{21}
\end{aligned}$$

War doch gar nicht so schlimm ;-)

Wie könnte man das noch besser abschätzen (ohne Taschenrechner)?

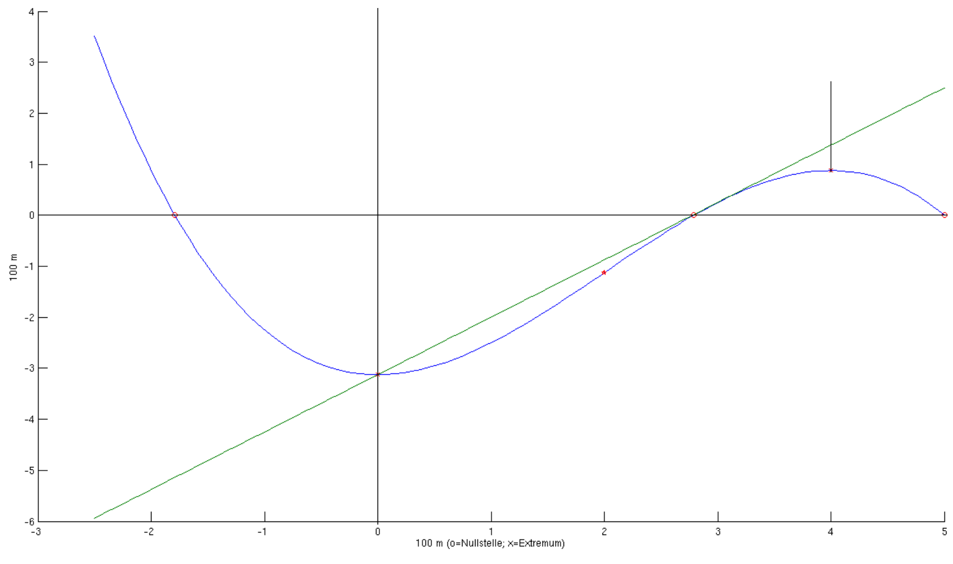
$$\frac{63}{32} = \frac{64-1}{32} = 2 - \frac{1}{32} = 2 - \frac{1}{2^5} = 2 - \frac{0.5}{2^4} = \cdots = 2 - 0.03125 = 1.96875$$

$\sqrt{21} \approx 4.582575695$ war angegeben. Wir rechnen in m^2, dass heißt das Endergebnis wird mit 10^4 multipliziert. Will man vor dem Komma keine Rundungsfehler so darf man frühestens nach der vierten Nachkommastelle runden.

4. (a) Die Mindesthöhe des Gerüsts beträgt 50 m. Berechnung: Stelle die Tangentengerade T_f an f auf, so dass sie durch den Punkt $(0, -\frac{25}{8})$ verläuft. $T_f(4)$ liefert das gewünschte Ergebnis.

   (b) Das Gerüst muss mindestens 100 m hoch sein, damit der ganze Osthang beleuchtet werden kann. Berechnung: Wie 4a, nur dass hier die Tangentengerade durch den Wendepunkt (Osthang) verlaufen muss.

Graf:



Lösung 10

Volumen eines Zylinders:

$$V(r,h) = \pi r^2 h = 256$$

Oberfläche eines Zylinders (Dosenmaterial):

$$O(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h \tag{1}$$

Das sind nun zwei Gleichungen, die jeweils von r und h abhängen. Die Oberfläche, also $O(r,h)$ wollen wir minimieren und das Volumen ist eine Nebenbedingung. Wir lösen die Volumengleichung nach einer der beiden Variabeln auf und setzen diese in die Oberflächengleichung ein. Dann hängt O nur noch von einer Variablen ab. Wir wählen das Auflösen nach h, weil das gerade am einfachsten ist. Man könnte aber auch nach r auflösen.

$$\pi r^2 h = 256$$

$\Leftrightarrow$

$$h = \frac{256}{\pi r^2} \tag{2}$$

Das setzen wir nun in (1) ein und erhalten

$$O(r) = 2\pi r^2 + \frac{512}{r}\,.$$

Wenn wir $O(r)$ minimieren wollen, so berechnen wir die Nullstelle(n) der ersten Ableitung und testen die Ergebniswerte mit der zweiten Ableitung:

$$O'(r) = 4\pi r - \frac{512}{r^2}$$
$$O''(r) = 4\pi + \frac{1024}{r^3}$$

$$O'(r) = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$4\pi r = \frac{512}{r^2}$$

$\Leftrightarrow$

$$r^3 = \frac{128}{\pi}$$

$\Leftrightarrow$

$$r = \sqrt[3]{\frac{128}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{2^6 2}{\pi}} = \frac{4\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{\pi}} \tag{3}$$

Wir überprüfen die zweite Ableitung, um festzustellen, ob es sich um ein Minimum oder Maximum handelt:

$$O''\left(\frac{4\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{\pi}}\right) = 4\pi + \frac{1024}{\left(\frac{4\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{\pi}}\right)^3} = 4\pi + \frac{1024\pi}{4^3 2} > 0$$

Demzufolge beschreibt unser berechnetes r in (3) ein Minimum. Nun können wir h berechnen, indem wir r in (2) einsetzen. Wir erhalten:

$$h = \frac{256}{\pi\left(4\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}\right)^2} = \frac{16}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}\right)^2} = \frac{16}{\pi^{1-\frac{2}{3}}\left(\sqrt[3]{2}\right)^2} = \frac{16}{\sqrt[3]{4\pi}}$$

Eine Dose, die ein Volumen von 256 cm^3 fasst und dabei eine möglichst geringe Oberfläche aufweist hat einen Radius von

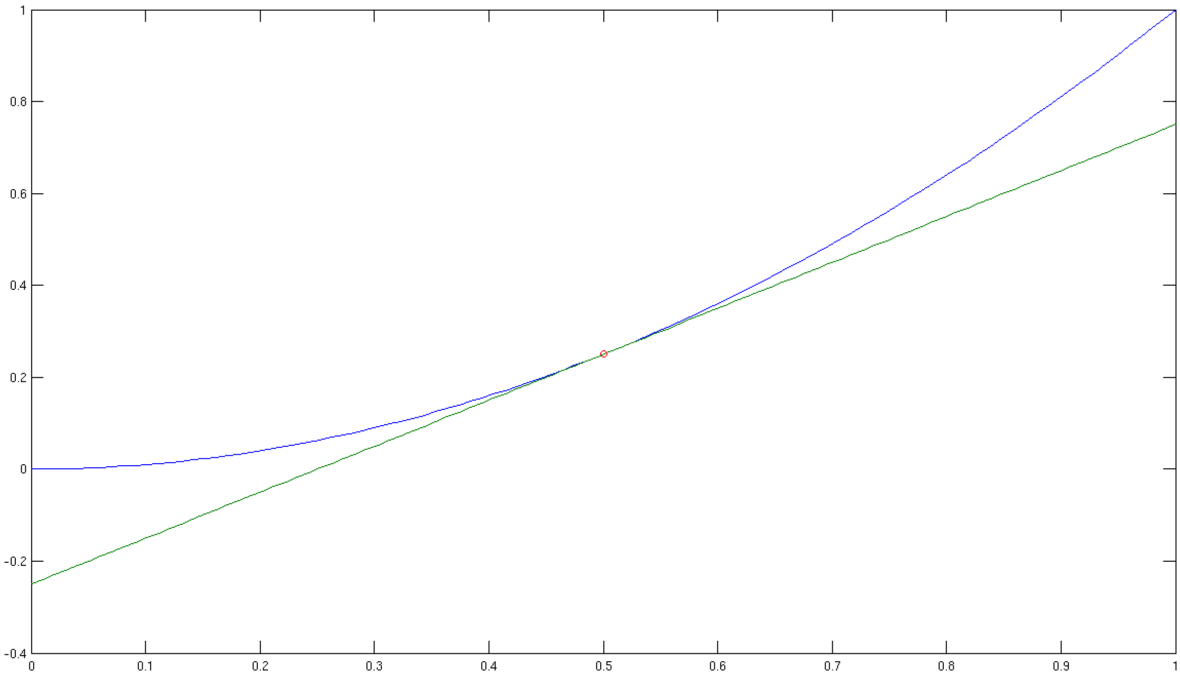
$$r = \frac{4\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{\pi}}\ \text{cm}$$

und eine Höhe von

$$h = \frac{16}{\sqrt[3]{4\pi}}\ \text{cm}\,.$$

Lösung 11

$$T_f(x) = f'(0.5)(x-0.5) + f(0.5) = x - 0.25$$



Lösung 12

1. $g(x) = -2x + 1$
2. $g(x) = (x - 1)\frac{1}{2}$
3. $g(x) = \frac{1}{4}x + 1$