Blatt 9: Grenzwerte und Stetigkeit — MAE 1

Aufgabe 1

Durch eine Verbesserung im Betrieb kann ein Eisenbahnzug jetzt eine um 9 km/h höhere Durchschnittsgeschwindigkeit erreichen und erzielt dadurch auf einer Strecke von 180 km Länge eine Zeiteinsparung von 60 min. Wie viele Stunden benötigt er neu für die Strecke?

Lösung auf Seite 2

Aufgabe 2

$$(a)\quad \lim_{x\to 2} x^3 - 2\,x + 4\,x^2 - 1 \qquad (b)\quad \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2}$$

$$(c)\quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x} \qquad (d)\quad \lim_{x\to\infty} \frac{2\,x}{x}$$

$$(e)\quad \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{x} \qquad (f)\quad \lim_{x\to\infty} \frac{-2\,x}{x}$$

Lösung auf Seite 2

Aufgabe 3

$$(a)\quad \lim_{x\to 5} \frac{x^2 - 5}{x^2 + x - 10} \qquad (b)\quad \lim_{x\to 0} \frac{x^3 + 2\,x}{x} \qquad (c)\quad \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 4\,x + 3}{x^2 - 3\,x + 2}$$

$$(d)\quad \lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 6\,x^2 + 11\,x - 6}{x - 1} \qquad (e)\quad \lim_{x\to -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3} \qquad (f)\quad \lim_{x\to 2} \frac{-x^2 - 3\,x + 10}{2\,x^2 + x - 10}$$

$$(g)\quad \lim_{x\to 0} \frac{(x-2)^2 - 4}{x} \qquad (h)\quad \lim_{x\to -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2}$$

Lösung auf Seite 2

Aufgabe 4

Gibt es bei den folgenden Funktionen Unstetigkeitsstellen? Wenn ja, wo und von welcher Art sind diese? Geben Sie zunächst den Definitionsbereich der Funktion an und untersuchen Sie dann (Grenzwert!) die jeweilige Funktion an den Stellen, wo diese nicht definiert ist. Machen Sie sich Skizzen der Funktionsgrafen.

$$(a)\quad f(x) = \frac{1 - x}{1 - \sqrt{x}} \qquad (b)\quad g(t) = \frac{t}{|t|}$$

$$(c)\quad h(s) = \frac{1}{|s| - 1} \qquad (d)\quad v(\alpha) = \frac{\alpha - 4}{\sqrt{\alpha} - 2}$$

Lösung auf Seite 2

Lösung 1

f_1 beschreibe die Fahrt des alten Eisenbahnzuges und f_2, die des neuen. Mit Df_i beschreiben wir die Durchschnittsgeschwindigkeit des Eisenbahnzuges f_i ($i = 1, 2$).

Der alte Zug f_1 benötigte a Stunden für 180 km. Der neue ist eine Stunde schneller, braucht also $a - 1$ Stunden für 180 km. Damit gilt

$$Df_1 = \frac{180}{a} \quad \text{und} \quad Df_2 = \frac{180}{a-1}$$

Da wir wissen, dass der neue Zug nun 9 kmh schneller ist als der alte gitl:

$$Df_1 + 9 = Df_2 \quad \Leftrightarrow \quad a = 5$$

Der neue Zug benötigt 4 Stunden für die Strecke von 180 km.

Lösung 2

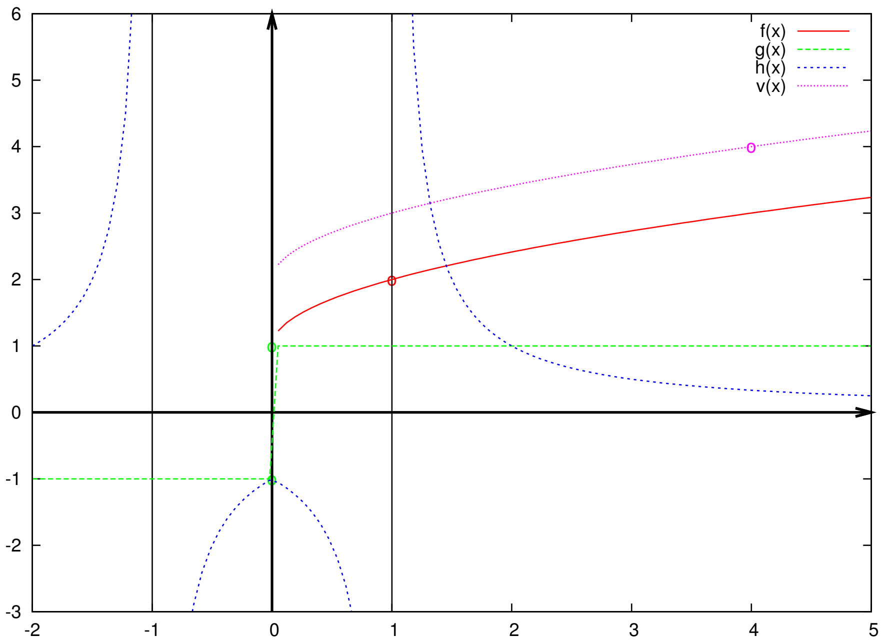
(a)	19	(b)	0
(c)	∞	(d)	2
(e)	$-\infty$	(f)	-2

Lösung 3

(a)	1	(b)	2	(c)	2
(d)	2	(e)	-6	(f)	$-\frac{7}{9}$
(g)	-4	(h)	12		

Lösung 4

	x_0	Definitionsbereich	Unstetigkeit	Grenzwert (bzw. $\lim_{x\to x_0}$)
(a)	1	$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$	hebbar	2
(b)	0	$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	nicht hebbar	"± 1"
(c)	± 1	$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$	Pole	"$\pm\infty$"
(d)	4	$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{4\}$	hebbar	4


f(x)
g(x)
h(x)
v(x)
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5