Blatt 8: Betragsfunktion und Polynome — MAE 1

Aufgabe 1

Es sei die Abbildung $f : x \mapsto x^2$ gegeben. Wir wollen verschiedene Bild– und Urbildmengen dazu betrachten.

1. Wie lautet die Bildmenge von
   (a) $[-1, 2]$,
   (b) $(-1, 2]$?
2. Wie lautet die Urbildmenge von
   (a) $[-2, 1]$,
   (b) $(0, 1]$?

Lösung auf Seite 3

Aufgabe 2

Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt

(a)	$\lvert x-6\rvert = 3$	(b)	$\lvert x-6\rvert \leq 3$	(c)	$\lvert x-2\rvert > \lvert x-3\rvert$
(d)	$\sqrt{x-5} < \sqrt{x+3}$	(e)	$\lvert x^2-3\rvert = 6$	(f)	$\dfrac{\lvert x-2\rvert}{\lvert x+5\rvert} > x$

?

Lösung auf Seite 3

Aufgabe 3 Horner–Schema

Berechnen Sie mit Hilfe des Horner–Schemas

1. $p(2)$ für $p(x) = x^5 - 3x^4 - 11x^3 + 27x^2 + 10x - 24$,
2. $p(3)$ für $p(x) = 2x^5 - 3x^4 - 7x^2 - 11x + 1$,
3. $p(2)$ für $p(x) = 4 - 8x - 13x^2 + 2x^3 + 3x^4$.

Lösung auf Seite 5

Aufgabe 4 Polynomdivision

Führen Sie die folgenden Polynomdivisionen durch:

1. $(6x^4 - 2x^3 - 41x^2 + 39x - 5) : (2x^2 + 4x - 5)$
2. $(x^5 + 1) : (x^2 - 1)$
3. $(-2x^5 - x^4 + 2x^3 + 9x^2 + 4x - 7) : (2x^2 + x)$

Lösung auf Seite 5

Aufgabe 5

Betrachten Sie das Polynom

$$p(x) = x^4 + ax - 2x + 3$$

Dieses Polynom ist ohne Rest durch $(x-3)$ teilbar. Wie groß ist $p(3)$? (Denken, nicht rechnen!)
Lösung auf Seite 5

Aufgabe 6 Überschwemmungsalarm

In einer am Fluss liegenden Ortschaft werden die zunehmend stärker werdenden Regenfälle beobachtet. Der Flusspegel liegt normalerweise bei 3 m. Experten prognostizieren einen Pegelstand $P(t)$ im Zeitablauf $t \geq 0$, $([t] = h\,,\ [P] = m)$, der folgender Funktion entspricht:

$$P(t) = -0.25t^3 + 0.75t^2 + t + 3$$

Bei Erreichen eines Pegelstandes von 6 m ist Katastrophenalarm auszurufen. Wann erwarten die Experten diesen Moment?
Lösung auf Seite 5

Aufgabe 7 Polynomkonstruktion über Linearfaktoren

Bilden Sie ein möglichst einfaches Polynom, das

1. die Nullstelle 3 hat,
2. die Nullstellen 3 und 1 hat,
3. die Nullstelle 3 hat und gerade ist.

Lösung auf Seite 5

Aufgabe 8 Brückenbau I

Über einen 200 m breiten Graben soll eine Brücke gespannt werden, die in der Mitte 5 m hoch ist. Mit welchem Polynom könnte man am einfachsten (kleinster Polynomgrad) die Konstruktion beschreiben?

Tipp: Machen Sie sich zunächst eine Skizze in ein Achsenkreuz. Der Ursprung befinde sich in der Mitte der Brücke.

Lösung auf Seite 6

Aufgabe 9 Polynominterpolation

1. Bestimmen Sie das Interpolationspolynom p_k von minimalem Grad (k), das durch die folgenden Punkte verläuft:
$$P_1 = (-2, 4)\,,\ P_2 = (1, -1) \quad \text{und} \quad P_3 = (3, 3)$$
2. Vergleichen Sie den Wert $p_k(2)$ mit $p_1(2)$, wobei $p_1(x)$ das Polynom ist, welches Sie durch stückweise lineare Interpolation erhalten.

Lösung auf Seite 6

Lösung 1 Für die Abbildung $f : x \mapsto x^2$ gilt (siehe Abbildung 1):

1. (a) Die Bildmenge von $[-1, 2]$ lautet $[0, 4]$
   (b) Die Bildmenge von $(-1, 2]$ lautet $[0, 4]$
2. (a) Die Urbildmenge von $[-2, 1]$ lautet $[-1, 1]$
   (b) Die Urbildmenge von $(0, 1]$ lautet $[-1, 1] \setminus \{0\}$

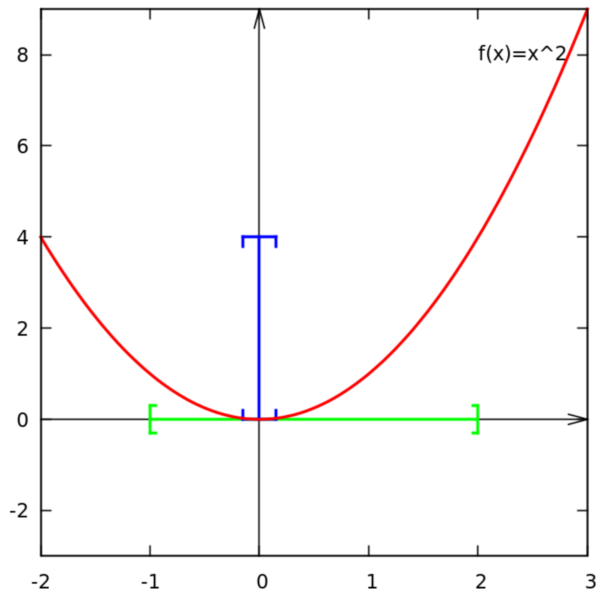


Abbildung 1: Darstellung zu 1a.: $f : [-1, 2] \to [0, 4]$

Lösung 2

(a)

$$
\begin{array}{llcl}
\mathbb{L}_{1a} = [6, \infty) & \mathbb{L}_{1b} = \{9\} & \Rightarrow & \mathbb{L}_1 = \{9\} \\
\mathbb{L}_{2a} = (-\infty, 6) & \mathbb{L}_{2b} = \{3\} & \Rightarrow & \mathbb{L}_2 = \{3\} \\
 & & \Rightarrow & \mathbb{L} = \{3, 9\}
\end{array}
$$

(b)

$$
\begin{array}{llcl}
\mathbb{L}_{1a} = [6, \infty) & \mathbb{L}_{1b} = (-\infty, 9] & \Rightarrow & \mathbb{L}_1 = \mathbb{L}_{1a} \cap \mathbb{L}_{1b} = [6, 9] \\
\mathbb{L}_{2a} = (-\infty, 6) & \mathbb{L}_{2b} = [3, \infty) & \Rightarrow & \mathbb{L}_2 = \mathbb{L}_{2a} \cap \mathbb{L}_{2b} = [3, 6) \\
 & & \Rightarrow & \mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = [3, 9]
\end{array}
$$

(c)

1. Fall: $x \geq 2 \,\wedge\, x \geq 3$ $\quad \mathbb{L}_{1a} = [3, \infty)$ $\quad \mathbb{L}_{1b} = \mathbb{R}$ $\quad \Rightarrow \quad \mathbb{L}_1 = [3, \infty)$

2. Fall: $x < 2 \,\wedge\, x \geq 3$ $\quad \mathbb{L}_{2a} = \emptyset$

3. Fall: $x \geq 2 \,\wedge\, x < 3$ $\quad \mathbb{L}_{3a} = [2, 3)$ $\quad \mathbb{L}_{3b} = \left(-\frac{5}{2}, \infty\right)$ $\quad \Rightarrow \quad \mathbb{L}_3 = [2, 3)$

4. Fall: $x < 2 \,\wedge\, x < 3$ $\quad \mathbb{L}_{4a} = (-\infty, 2)$ $\quad \mathbb{L}_{4b} = \emptyset$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{L} = [2, \infty)$$

(d)

$$\begin{aligned}
\sqrt{x-5} < \sqrt{x+3} \quad &\Rightarrow \quad x - 5 \geq 0 \quad \wedge \quad x + 3 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x \in [5, \infty) \cap [-3, \infty) = [5, \infty) =: \mathbb{L}_a
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & x - 5 < x + 3 \\
\Leftrightarrow \quad & -5 < 3 \qquad \checkmark \;\; \forall x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L}_b = \mathbb{R} \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow \quad \mathbb{L} = \mathbb{L}_a \cap \mathbb{L}_b = [5, \infty)
\end{aligned}$$

(e)

1. Fall:

$$\begin{aligned}
& x^2 - 3 \geq 0 \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 \geq 3 \\
\Leftrightarrow \quad & |x| \geq \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L}_{1a} = [\sqrt{3}, \infty) \cup (-\infty, -\sqrt{3}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& x^2 - 3 = 6 \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 = 9 \\
\Leftrightarrow \quad & x = \pm 3 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L}_{1b} = \{-3, 3\}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{L}_1 = \mathbb{L}_{1a} \cap \mathbb{L}_{1b} = \{-3, 3\}$$

2. Fall:

$$\begin{aligned}
& x^2 - 3 < 0 \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 < 3 \\
\Leftrightarrow \quad & |x| < \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L}_{2a} = (-\sqrt{3}, \sqrt{3})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& x^2 - 3 = -6 \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 = -3 \qquad \text{In } \mathbb{R} \text{ nicht lösbar} \\
& \Rightarrow \quad \mathbb{L}_2 = \emptyset
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir die Lösungsmenge für $x \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \{-3, 3\}$$

(f)

1. Fall: $x \geq 2 \ \wedge \ x \geq -5$ $\quad \mathbb{L}_{1a} = [2, \infty)$ $\quad \mathbb{L}_{1b} = (-\sqrt{2} - 2, \sqrt{2} - 2)$
$\Rightarrow \quad \mathbb{L}_1 = \emptyset$

2. Fall: $x < 2 \ \wedge \ x \geq -5$ $\quad \mathbb{L}_{2a} = [-5, 2)$ $\quad \mathbb{L}_{2b} = (-\sqrt{11} - 3, \sqrt{11} - 3)$
$\Rightarrow \quad \mathbb{L}_2 = [-5, \sqrt{11} - 3)$

3. Fall: $x \geq 2 \ \wedge \ x < -5$ $\quad \mathbb{L}_{3a} = \emptyset$

4. Fall: $x < 2 \ \wedge \ x < -5$ $\quad \mathbb{L}_{4a} = (-\infty, -5)$ $\quad \mathbb{L}_{4b} = \mathbb{R} \setminus [-\sqrt{2} - 2, \sqrt{2} - 2]$
$\Rightarrow \quad \mathbb{L}_4 = (-\infty, -5)$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{L} = (-\infty, \sqrt{11} - 3) \setminus \{-5\}$$

Lösung 3

1. $p(2) = 0$
2. $p(3) = 148$
3. $p(2) = 0$

Lösung 4

1. $3x^2 - 7x + 1$
2. $x^3 + x + \frac{1}{x-1}$
3. $-x^3 + x + 4 - \frac{7}{2x^2+x}$

Lösung 5 Wenn ein Polynom $p(x)$ ohne Rest durch $(x - 3)$ teilbar ist, so gibt es ein Polynom $g(x)$, so dass
$$p(x) = (x - 3)g(x) \, .$$
Das bedeutet, dass 3 eine Nullstelle von $p(x)$ ist. Also gilt $p(3) = 0$.

Lösung 6 Es muss Katastrophenalarm ausgerufen werden, sobald $P(t) = 6$ ist. Das Polynom
$$-0.25t^3 + 0.75t^2 + t - 3$$
das die Nullstellen $\{2, -2, 3\}$. Wir gehen von einer vorwärtslaufenden Zeit aus.

Der nächste Katastrophenalarm ist also laut Expertenmeinung in zwei Stunden auszurufen.

Lösung 7

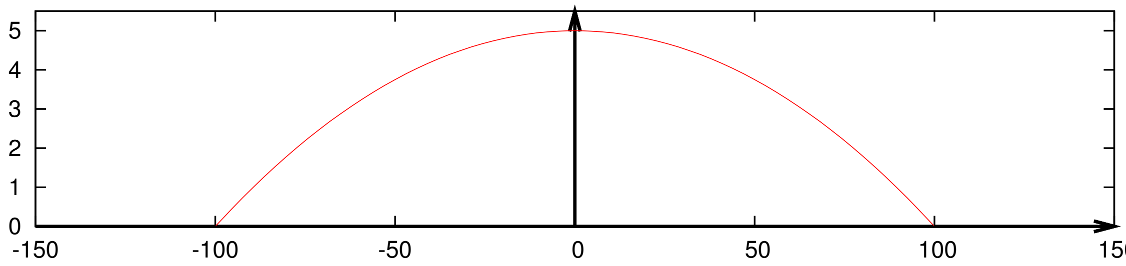
1. $p(x) = (x - 3)$

2. $p(x) = (x-3)(x-1) = x^2 - 4x + 3$

3. $p(x) = (x-3)(x+3) = x^2 - 9$

Lösung 8

$$p(x) = -5 \cdot 10^{-4} x^2 + 5$$



Lösung 9 Wir haben drei Punkte, das heißt drei Bedingungen, die auf drei Gleichungen führen. Also wählen wir ein Polynom vom Grad 2, welches uns drei Freiheitsgrade (a, b, c) liefert:

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

Folgende Bedingungen müssen erfüllt sein:

$$\begin{aligned} p(-2) &= 4a & -2b && +c && = 4 \\ p(1) &= a & +b && +c && = -1 \\ p(3) &= 9a & +3b && +c && = 3 \end{aligned}$$

Das führt auf folgendes lineares Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Wir lösen das Gleichungssystem auf, etwa mit dem Gauß–Algorithmus oder aber wir invertieren die Matrix und erhalten

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{-1}{30} \begin{pmatrix} -2 & 5 & -3 \\ 8 & -5 & -3 \\ -6 & -30 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{-1}{30} \begin{pmatrix} -22 \\ 28 \\ 24 \end{pmatrix},$$

woraus wir das Polynom

$$p_2(x) = \frac{-1}{30}(-22x^2 + 28x + 24) = \frac{1}{15}(11x^2 - 14x - 12)$$

erhalten. Wir testen die Punkte

$$\begin{aligned} p_2(-2) &= \frac{1}{15}(11\cdot 2^2+14\cdot 2-12) = \frac{1}{15}(44+28-12) = \frac{60}{15} &&= 4\\ p_2(1) &= \frac{1}{15}(11-14-12) = \frac{-15}{15} &&= -1\\ p_2(3) &= \frac{1}{15}(11\cdot 3^2-14\cdot 3-12) = \frac{1}{15}(99-42-12) = \frac{45}{15} &&= 3 \end{aligned}$$

Und so sieht es aus: