Blatt 7: Reihen und Konvergenz **MAE 1**

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Grenzwerte der folgenden Geometrischen Reihen:

$$(a) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, 5}{3^{k+1}} \qquad (b) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{2\,k-2}5^{-k+1}}{2^{k-2}}$$

$$(c) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4 \cdot 2^{k+1}}{3^k} \qquad (d) \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2\,k}$$

Zu (d): Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe?

Lösung auf Seite 3

Aufgabe 2 Medikamentenabbau

Ein Patient nimmt täglich 5 mg eines Medikamentes ein. Im Laufe eines Tages wird von dem im Körper befindlichen Medikament 40% abgebaut und ausgeschieden. a_n gibt an, wie viel mg sich am n–ten Tag unmittelbar nach Einnahme des Medikaments im Körper befinden. Wie entwickelt sich die Menge des Medikaments im Körper auf lange Zeit gesehen?

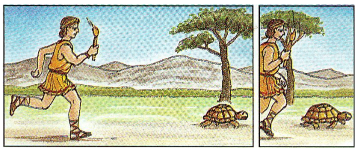
Lösung auf Seite 3

Aufgabe 3 Schacherfinder

Es wird erzählt, dass sich Sessa Ebn Daher, der Erfinder des Schachspiels, für seine geistreiche Idee vom indischen König Sheram eine Belohnung erbitten durfte. Er wünschte sich für das erste Feld des Schachbretts ein Reiskorn, für das zweite zwei Reiskörner, für das dritte vier, usw. – also für jedes Feld immer doppelt so viele wie für das vorangehende. Der König lächelte über diesen Wunsch, der ihm bescheiden erschien. Was meinen Sie dazu? Lösung auf Seite 3

Aufgabe 4 Paradoxon von Zenon

Zenon wollte zeigen: "Veränderung (Bewegung) ist Schein. Das wahre Sein ist unveränderlich"



Der griechische Philosoph *Zenon* (450 v. Chr.) behauptete, Achilles könne eine Schildkröte nicht einholen. Sein Argument: Angenommen Achilles laufe 10–mal so schnell wie die Schildkröte und diese habe einen Vorsprung von 1 Stadion (c.a. 185 m). Wenn Achilles diese Strecke zurückgelegt habe, sei die schildkröte $\frac{1}{10}$ der Streckenlänge weitergekrochen. Wenn Achilles diese Strecke zurückgelegt habe, sei die Schildkröte erneut $\frac{1}{10}$ dieser Streckenlänge weitergekrochen usw. Die Schildkröte habe also immer einen Vorsprung.

Wie ist die Argumentation von Zenon zu beurteilen? Lösung auf Seite 4

Aufgabe 5

1. Zeigen Sie mithilfe der Geometrischen Reihe, dass

$$0.\bar{9} = 1$$

ist.

2. Stellen Sie die periodische Dezimalzahl $0.035\overline{47}$ als rationale Zahl dar.

Lösung auf Seite 5

Aufgabe 6

Berechnen Sie den Grenzwert der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3\,k-2)(3\,k+1)}\,.$$

Lösung auf Seite 6

Aufgabe 7

Überprüfen Sie die Reihen auf Konvergenz

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{n-2}{n+2}$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+1}$$

Lösung auf Seite 6

Lösung 1

(a)	$\frac{5}{4}$	(b)	$\frac{200}{9}$
(c)	24	(d)	$\frac{1}{1+x^2}$ für $\lvert x\rvert < 1$

Lösung 2

Tag 0	5		
Tag 1	$5 \cdot 0,6 + 5$	$= 5(0,6+1)$	
Tag 2	$5(0,6+1)0,6+5$	$= 5((0,6+1)0,6+1)$	$= 5(0,6^2+0,6^1+0,6^0)$
$\vdots$			
Tag n	$5(0,6^n + \cdots + 0,6^1 + 0,6^0)$		

Daraus ergibt sich eine Darstellung als Folge gemäß

$$a_n = 5\sum_{k=0}^{n} 0,6^k\,.$$

Was passier auf lange Sicht? Dabei hilft die Geometrische Reihe:

$$\lim_{n\to\infty} 5\sum_{k=0}^{n} 0,6^k = \lim_{n\to\infty} 5\frac{1-0,6^{n+1}}{0,4} = \frac{25}{2}$$

Was bedeutet dieses Ergebnis? Obwohl das Medikament immer nur zum Teil im Körper abgebaut und darüberhinaus täglich wieder aufgestockt wird, wird sich im Körper des Patienten nie mehr als $12,5\,mg$ des Wirkstoffes ansammeln. Hm. Die Rechnung klappt im übrigen auch mit Alkohol und Nikotin ...

Lösung 3

Was liegt auf den Feldern?

1–tes Feld	1	Reiskorn
2–tes Feld	2	Reiskörner
3–tes Feld	4	Reiskörner
4–tes Feld	8	Reiskörner
$\vdots$ n–tes Feld	2^{n-1}	Reiskörner

Ein Schachbrett hat $8 \times 8 = 64$ Felder. Insgesamt kommen da dann

$$\sum_{k=1}^{64} 2^{k-1}$$

Reiskörner drauf. Wir wollen die Geometrische Reihe bemühen, doch dazu müssen wir noch ein wenig umformen:

$$\sum_{k=1}^{64} 2^{k-1} = \sum_{k=0}^{63} 2^k = \frac{1-2^{64}}{1-2} = 2^{64} - 1 = 18446744073709551615$$

Bei einem Gewicht von etwa $0.025\ g$ pro Reiskorn wären das ungefähr $4.6 \cdot 10^{11}$ Tonnen Reis. Das entspricht etwa dem 790–fachen der Welternte von 2003.

Lösung 4

Zu Beginn ($n = 0$) befindet sich Achilles bei der Metermarke $a_0 = 0$ und die Schildkröte bei $s_0 = 185$. Beide laufen mit konstanter Geschwindigkeit los, wobei die Geschwindigkeit der Schildkröte 10% von der von Achilles beträgt. Wir stoppen die Situation sobald Achilles bei der Startposition der Schildkröte angekommen ist ($n = 1$). Achilles befindet sich nun bei der Metermarke $a_1 = 185$ und die Schildkröte bei $s_1 = 185 + 0.1 \cdot 185$. Wir lassen beide weiter laufen und stoppen erneut ($n = 2$), sobald Achilles bei s_1 angekommen ist. Es ist nun $a_2 = s_1$ und $s_2 = 185 + 0.1 \cdot 185 + 0.1^2 \cdot 185$, denn Achilles ist in der Zwischenzeit von 185 bis $185 + 0.1 \cdot 185$ gelaufen also eine Strecke von $0.1 \cdot 185$. In dieser Zeit läuft die schildkröte 10% davon. Wir adddieren folglich $0.1^2 \cdot 185$ auf die vorherige Position.

Wir fassen das mal übersichtlich zusammen:

n	a_n	s_n
0	0	185
1	185	$185 + 0.1 \cdot 185$
2	$185 + 0.1 \cdot 185$	$185 + 0.1 \cdot 185 + 0.1^2 \cdot 185$
sukkzessives Fortfahren liefert		
3	$185(0.1^0 + 0.1^1 + 0.1^2)$	$185(0.1^0 + 0.1^1 + 0.1^2 + 0.1^3)$
$\vdots$		
k	$185 \sum_{i=0}^{k-1} 0.1^i$	$185 \sum_{i=0}^{k} 0.1^i$

Wohin strebt die Position der Schildkröte, wenn wir den Prozess laufen lassen?

$$\begin{aligned}
s_n &= 185 \sum_{i=0}^{k} 0.1^i \\
&= 185 \left(\frac{1-0.1^{k+1}}{1-0.1} \right) && \text{(Geometrische Reihe)} \\
&= 185 \left(\frac{1-\frac{1}{10^{k+1}}}{0.9} \right) \\
&\to \frac{185}{0.9} && (k \to \infty) \\
&= 205.\bar{5}
\end{aligned}$$

Und die von Achilles?

$$\begin{aligned}
a_n &= 185 \sum_{i=0}^{k-1} 0.1^i \\
&= 185 \left(\frac{1-0.1^{k}}{1-0.1} \right) && \text{(Geometrische Reihe)} \\
&= 185 \left(\frac{1-\frac{1}{10^{k}}}{0.9} \right) \\
&\to \frac{185}{0.9} && (k \to \infty) \\
&= 205.\bar{5}
\end{aligned}$$

Bei der Metermarke $205.\bar{5}$ treffen sie sich also.

Lösung 5

1.

$$\begin{aligned}
0.\bar{9} &= 0.999\cdots = 0.9 + 0.09 + 0.009 + \cdots = \frac{9}{10^1} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \cdots \\
&= 9\left(\frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots \right) = \lim_{n\to\infty} 9 \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{10}\right)^k = \lim_{n\to\infty} 9 \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{10}\right)^{k+1} \\
&= \lim_{n'\to\infty} \frac{9}{10} \sum_{k=0}^{n'} \left(\frac{1}{10}\right)^k = \lim_{n'\to\infty} \frac{9}{10} \frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^{n'+1}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{9}{10}\frac{10}{9} = 1
\end{aligned}$$

2.

$$0.0354\bar{7} = \frac{439}{12375}$$

Lösung 6

$$\frac{1}{3}$$

Lösung 7

1. konvergiert (Quotientenkriterium)
2. konvergiret (Leibnikriterium)