Blatt 6: Folgen und Grenzwert

MAE 1

Aufgabe 1 Von explizit zu implizit

Geben Sie die aufzählende, explizite und implizite Darstellung der Folge der geraden Zahlen an

Lösung auf Seite 3

Aufgabe 2 Schokolade

Geben Sie die Folge

$$a_n := \frac{1}{2^{n-1}}$$

in impliziter Darstellung an.

Lösung auf Seite 3

Aufgabe 3

Sei $n \in \mathbb{N}$. Stellen Sie die angegebenen Folgen aufzählend dar (ersten 7 Glieder) und berechnen Sie den jeweiligen Grenzwert:

$$(a) \quad a_n = \frac{n(n-1)}{2} \qquad (b) \quad a_n = \frac{2n}{n^2+1}$$

Lösung auf Seite 3

Aufgabe 4

Finden Sie eine explizite Darstellung für die angegebenen Folgen.

$$(a) \quad 1, 4, 9, 16, 25, \ldots \qquad (b) \quad \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$$

Lösung auf Seite 3

Aufgabe 5

Finden Sie eine implizite Darstellung für die angegebenen Folgen.

$$(a) \quad 1, 2, 6, 24, 120, 720, \ldots \qquad (b) \quad 2, 4, 16, 256, 65'536, \ldots$$

Lösung auf Seite 3

Aufgabe 6

Seien $a, c \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Konvergieren diese Folgen? Wenn ja bestimmen Sie den Grenzwert a.

$$\begin{array}{llllll}
(a) & a_n = b & (b) & a_n = \dfrac{n}{3n} & (c) & a_n = \dfrac{2n^2+n+1}{n^2+2n+5} \\
(d) & a_n = \sqrt[n]{c} & (e) & a_n = \dfrac{5n^2+n-12}{2n^3+2n^2-3n+1} & (f) & a_n = \dfrac{3n^3-n^2+2n-7}{2n^2+4n-1}
\end{array}$$

Lösung auf Seite 4

Aufgabe 7

Überprüfen Sie die Konvergenzeigenschaft und berechnen Sie gegebenenfalls die Grenzwerte der folgenden Folgen:

$$(a) \qquad a_n = \sqrt{n^2 + 3\,n + 1} - \sqrt{n^2 + 2\,n}$$
$$(b) \qquad a_1 = 4 \qquad\qquad a_{n+1} = \sqrt{3 + a_n}$$

Tipp zu (a): Verwenden Sie $a - b = \frac{a^2 - b^2}{a+b}$. **Tipp zu (b):** Monotoniekriterium

Lösung auf Seite 4

Aufgabe 8 arithmetische Folge

Es sei $a_n = a_{n-1} + d$ eine arithmetische Folge. Bestimmen Sie die fehlenden Größen:

	a_n	a_1	n	d
(a)		5	7	9
(b)	27		4	8
(c)	71	16		5
(d)	69	9	21	

Lösung auf Seite 4

Aufgabe 9 gemoetrische Folge

Es sei $a_n = a_{n-1} \cdot q$ eine geometrische Folge. Bestimmen Sie die fehlenden Größen:

	a_n	a_1	n	q
(a)		3	4	2
(b)	567		5	3
(c)	245	5		7
(d)	3.125	100	6	

Lösung auf Seite 4

Aufgabe 10

Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen

$$(1) \quad \left(1 + \frac{4}{n}\right)^n \qquad\qquad (2) \quad \frac{\frac{n}{2\,n+1}}{\left(1 - \frac{2}{n}\right)^n}$$
$$(3) \quad \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \qquad\qquad (4) \quad \left(c - \frac{a}{n^2}\right)^n$$
$$(5) \quad \left(c - \frac{a}{n}\right)^n$$

Lösung auf Seite 4

Lösung 1

aufzählend $0, 2, 4, 6, 8, \dots$

implizit/rekursiv

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_{n+1} &= a_n + 2 \end{aligned}$$

explizit

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 2 \\ &= a_{n-2} + 2 \cdot 2 \\ &= a_{n-3} + 3 \cdot 2 \\ &\vdots \\ &= a_{n-k} + k \cdot 2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $a_n = 2\,n$

Lösung 2

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_{n+1} &= \frac{a_n}{2} \end{aligned}$$

Lösung 3

(a) $a_n = 0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, \dots$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$

(b) $a_n = 1, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{8}{17}, \frac{5}{13}, \frac{12}{37}, \frac{7}{25}, \dots$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Lösung 4

(a) $a_n = n^2$ (b) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$

Lösung 5

(a)

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_{n+1} &= (n+1) \cdot a_n \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_{n+1} &= a_n^2 \end{aligned}$$

Lösung 6

(a)	$a = b$	(b)	$a = \frac{1}{3}$	(c)	$a = 2$
(d)	$a = 1$	(e)	$a = 0$	(f)	divergent

Lösung 7

(a)

$$\sqrt{n^2 + 3\,n + 1} - \sqrt{n^2 + 2\,n} = \frac{n+1}{\sqrt{n^2 + 3\,n + 1} + \sqrt{n^2 + 2\,n}}$$
$$= \frac{1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}}} \underset{n \to \infty}{\to} \frac{1}{2}$$

(b) Die Folge ist monoton fallend (Beweis durch Vollständige Induktion) und größer Null. Damit ist sie konvergent. Grenzwert: Sei a der Grenzwert von a_n. Damit gilt (nach dem Grenzübergang) $a = \sqrt{3+a}$ Daraus folgt, dass $a^2 - a - 3 = 0$. Daraus ergibt sich der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1+\sqrt{13}}{2}\,.$$

Lösung 8

$$(a)\; a_n = 59\,,\;\; (b)\; a_1 = 3\,,\;\; (c)\; n = 12\,,\;\; (d)\; d = 3$$

Lösung 9

$$(a)\; a_n = 24\,,\;\; (b)\; a_1 = 7\,,\;\; (c)\; n = 3\,,\;\; (d)\; d = 0.5$$

Lösung 10

1.

$$\left(1 + \frac{4}{n}\right)^n \overset{n\,=\,4\,m}{=} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{4\,m} = \left(\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right)^4 \underset{m\,\to\,\infty}{\to} \mathrm{e}^4$$

2.

$$\frac{1}{2}\mathrm{e}^2$$

3.

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1 + \frac{-1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \underset{n\,\to\,\infty}{\to} \mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}^0 = 1$$

4.
$$1$$

5.
$$\frac{1}{\sqrt[c]{\mathrm{e}^a}}$$