School of Engineering
Winterthur
Zürcher Hochschule für Angewandte Wissenschaften

Blatt 5: Binomische Formel **MAE 1**

Aufgabe 1 Fakultät

Berechnen sie

$$1! \quad ,2! \quad ,3! \quad ,6! \quad ,\frac{4!}{2!} \quad \text{und} \quad \frac{6!}{3!\cdot 4!}$$

Lösung auf Seite 3

Aufgabe 2 Binomialkoeffizienten

Berechnen sie die Binomialkoeffizienten

$$(a) \quad \binom{5}{3} = ? \qquad (b) \quad \binom{3}{5} = ? \qquad (c) \quad \binom{3}{1} = ? \qquad (d) \quad \binom{0}{k} = ?$$

Lösung auf Seite 3

Aufgabe 3 Binomialkoeffizienten

1. Lesen sie folgende Binomialkoeffizienten aus dem Pascalschen Dreieck ab und rechnen Sie nach:

   (a)
   $$\binom{4}{2} + \binom{4}{3} = \binom{5}{3}$$

   (b)
   $$\binom{5}{3} = \binom{5}{2}$$

2. Zeigen sie

   (a)
   $$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

   (b)
   $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Lösung auf Seite 3

Aufgabe 4

Wie lauten die ersten fünf Summanden von $(a+b)^{13}$? Lösung auf Seite 4

Aufgabe 5

Wie heißt der Koeffizient von c^6 in der Summenentwicklung von

$$(a)\ (1+c)^{15} \quad (b)\ \left(\frac{c}{2}-2\right)^{16} \quad (c)\ \left(1-\frac{c^2}{3}\right)^{20}$$

Lösung auf Seite 4

Lösung 1

$$1\,,\;2\,,\;6\,,\;720\,,\;\frac{4!}{2!}=\frac{\cancel{1}\cdot\cancel{2}\cdot 3\cdot 4}{\cancel{1}\cdot\cancel{2}}=12\,,\;\frac{6!}{3!\cdot 4!}=\frac{\cancel{1}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{4}\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\;\cancel{1}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{4}}=\frac{5\cdot 6}{2\cdot 3}=5$$

Lösung 2

Zu a:

$$\binom{5}{3}=\frac{5!}{3!\cdot 2!}=\frac{\cancel{1}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot 4\cdot 5}{\cancel{1}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot 1\cdot 2}=10$$

Zu b:

$$\binom{3}{5}=\frac{3\cdot 2\cdot 1\cdot 0\cdot(-1)}{5!}=0$$

Achtung: Hier wurde $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ durch $\frac{n\cdots(n-k+1)}{k!}$ ersetzt, da die Fakulät für negative Zahlen nicht definiert ist.

Zu c:

$$\binom{3}{1}=\frac{3!}{1!\cdot 2!}=3$$

Zu d:

$$\binom{0}{k}=\frac{0\cdots(0-k+1)}{k!}=0$$

Lösung 3

Zu 2a: Wir starten links und hoffen rechts wieder "rauszukommen"

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}$$

Es ist $(k+1)!=k!\,(k+1)$ also

$$=\frac{n!\,(k+1)}{(k+1)!(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}$$

Es ist $(n-k-1)!=(n-k)!\,(n-k)^{-1}$ also weiter

$$=\frac{n!\,(k+1)}{(k+1)!(n-k)!}+\frac{n!\,(n-k)}{(k+1)!(n-k)!}$$

Das kann jetzt auf einem Bruchstrich zusammengefaßt werden:

$$\begin{aligned} &= \frac{n!\,(k+1) + n!\,(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{n!\,(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \binom{n+1}{k+1} \end{aligned}$$

Zu 2b:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!k!} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} \end{aligned}$$

Der besseren Übersicht wegen definiere: $a := n - k$ dann folgt

$$\begin{aligned} &= \frac{n!}{a!(n-a)!} \\ &= \binom{n}{a} \end{aligned}$$

setze a wieder ein

$$= \binom{n}{n-k}$$

Lösung 4

$$a^{13}\,,\ 13\,a^{12}b\,,\ 78\,a^{11}b^2\,,\ 286\,a^{10}b^3\,,\ 715\,a^9b^4$$

Lösung 5

$$(a)\ 5005 \quad (b)\ 128128 \quad (c)\ -\frac{380}{9}$$