Blatt 4: Vollständige Induktion MAE 1

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass $\forall\, n \in \mathbb{N}\,,\ n \geq 5\ :$

$$2^n > n^2$$

Lösung auf Seite 3

Aufgabe 2

Werten Sie die Summen

$$\sum_{k=1}^{4} \frac{1}{k} \qquad \text{und} \qquad \sum_{l=2}^{4} 3^{4-l} 2^l$$

aus.

Lösung auf Seite 3

Aufgabe 3 Teleskopsumme

Zu welchen Termen zerfällt die Teleskopsumme

$$\sum_{k=m}^{n} (a_k - a_{k+1}) = ?$$

Lösung auf Seite 3

Aufgabe 4 Summenknobelei

Schreiben Sie mit Hilfe des Summenzeichens

$$(a)\ 1 + 2 + 3 + \cdots + 7 \quad (b)\ 4 + 9 + 16 + \cdots + 100 \quad (c)\ 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{256}$$

Lösung auf Seite 3

Aufgabe 5 Teleskopprodukt

Berechnen Sie die verbleibenden Terme des Teleskopprodukts

$$\prod_{k=m}^{n} \frac{a_k}{a_{k+1}} = ?$$

Lösung auf Seite 4

Aufgabe 6 Teleskopprodukt

Berechnen Sie den Wert des Produks

$$\prod_{k=1}^{100} \frac{k+1}{k}$$

Lösung auf Seite 4

Nun dürfen Sie sich noch mal ein wenig in Sachen Vollständige Induktion üben und zwar <u>mit</u> Summenzeichen. Good luck!

Aufgabe 7 Geometrische Reihe

Zeigen sie $\forall\, n \in \mathbb{N}\; \forall q \neq 1\;$:

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Lösung auf Seite 4

Aufgabe 8

Zeigen Sie $\forall\, n \in \mathbb{N}\;$:

$$\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Lösung auf Seite 5

Lösung 1

Behauptung Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 5$ gilt

$$2^n > n^2$$

Induktions–anfang $n = 5$:

$$32 = 2^5 > 5^2 = 25 \quad \checkmark$$

Induktions–voraussetzung

$$A(k): \qquad 2^k > k^2$$

Induktions–schritt $A(k) \Rightarrow A(k+1)$ mit:

$$A(k+1): \qquad 2^{k+1} > (k+1)^2$$

Induktions–beweis Es ist

$$2^{k+1} = 2^k \cdot 2 > k^2 \cdot 2\,.$$

Wenn jetzt $k^2 \cdot 2 > (k+1)^2$ erfüllt ist, sind wir fertig. Mal sehen.

$$\begin{aligned}
& & k^2 \cdot 2 &> (k+1)^2 \\
&\Leftrightarrow & k^2 \cdot 2 &> k^2 + 2k + 1 \\
&\Leftrightarrow & k^2 &> 2k + 1 \\
&\Leftrightarrow & k^2 - 2k - 1 &> 0 \\
&\Leftrightarrow & k(k-2) &> 1
\end{aligned}$$

Das ist für $k \geq 5$ erfüllt (sehen sie das?). Insgesamt erhalten wir

$$2^{k+1} > (k+1)^2\,,$$

was gerade unserer Behauptung entspricht. $\square$

Lösung 2

$$\sum_{k=1}^{4} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{12+6+4+3}{12} = \frac{25}{12}$$

und

$$\sum_{l=2}^{4} 3^{4-l} 2^l = 3^{4-2}2^2 + 3^{4-3}2^3 + 3^{4-4}2^4 = 9 \cdot 4 + 3 \cdot 8 + 16 = 36 + 24 + 16 = 76$$

Lösung 3

$$a_m - a_{n+1}$$

Lösung 4

$$(a)\ \sum_{k=1}^{7} k \quad (b)\ \sum_{k=2}^{10} k^2 \quad (c)\ \sum_{k=0}^{8} (-1)^k \frac{1}{2^k}$$

Lösung 5

$$\frac{a_m}{a_{n+1}}$$

Lösung 6

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{100} \frac{k+1}{k} &= \prod_{k=m}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} && \text{mit } a_k := k\,,\ m := 1\,,\ n := 100 \\
&= \prod_{k=m+1}^{n+1} \frac{a_k}{a_{k-1}} && \text{Indexverschiebung} \\
&= \prod_{k=m'}^{n'} \frac{a_k}{a_{k-1}} && \text{mit } m' := m+1\,,\ n' := n+1 \\
&= \frac{a_{n'}}{a_{m'-1}} && \text{Teleskopprodukt} \\
&= \frac{a_{n+1}}{a_m} = \frac{a_{101}}{a_1} = 101
\end{aligned}$$

Lösung 7

Behauptung

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \tag{1}$$

Induktionsanfang

(1) gilt für $n = 0$

$$q^0 = \frac{1-q^1}{1-q} = 1 \quad \checkmark$$

Induktionsvoraussetzung

(1) gelte für $n = k$:

$$A(k): \quad \sum_{i=0}^{k} q^i = \frac{1-q^{k+1}}{1-q}$$

Induktionsschritt

Zu zeigen ist, dass dann auf (1) für $n = k+1$ geschlossen werden kann.

$$A(k+1): \quad \sum_{i=0}^{k+1} q^i = \frac{1-q^{k+2}}{1-q}$$

Induktions-beweis

Wir starten mit der linken Seite von $A(k+1)$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k+1} q^i &= \sum_{i=0}^{k} q^i + q^{k+1} \\ &= \frac{1-q^{k+1}}{1-q} + q^{k+1} \\ &= \frac{1-q^{k+1}+q^{k+1}(1-q)}{1-q} \\ &= \frac{1-q^{k+1}+q^{k+1}-q^{k+2}}{1-q} \\ &= \frac{1-q^{k+2}}{1-q}\end{aligned}$$

$\square$

Lösung 8

Behauptung

$$\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Induktions-anfang

$$1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} \qquad \checkmark$$

Induktions-voraussetzung

$$A(k): \qquad \sum_{j=1}^{k} j^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Induktions-schritt

$A(k) \Rightarrow A(k+1)$ mit

$$A(k+1): \qquad \sum_{j=1}^{k+1} j^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Induktions–beweis

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k+1} j^2 &= \sum_{j=1}^{k} j^2 + (k+1)^2 \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} \\
&= \frac{(k+1)(k(2k+1) + 6(k+1))}{6} \\
&= \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}
\end{aligned}
$$