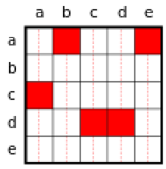
Blatt 3: Aussagenlogik **MAE 1**

Aufgabe 1 Quantoren in der Liebe

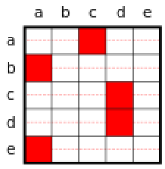
Es beschreibe Lxy die Aussage "x liebt y". Im Folgenden ist je eine Aussage dargestellt in Quantorenschreibweise, in Umgangssprache und graphisch, wobei die negative y-Achse jeweils das erste Argument von L, also x bei Lxy und y bei Lyx, und die positive x-Achse das zweite Argument von L darstellt. Füllen Sie die jeweils fehlende Komponente aus.



1. $\forall x \, \exists y \; : \; Lyx$

____

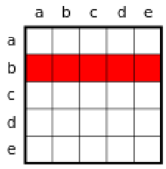
____



2. $\forall x \, \exists y \; : \; Lxy$

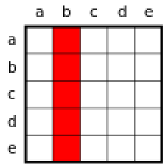
____

____



3. ____

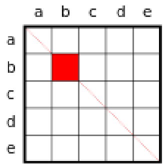
Jemand liebt alle.



4. $\exists x \, \forall y \; : \; Lyx$

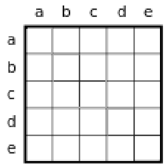
____

____



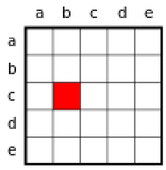
5. ____

Jemand liebt sich selbst.



6. $\forall x \; : \; Lxx$

Alle lieben sich selbst.

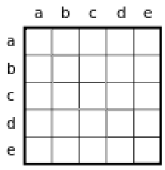


7. ____

Einer liebt einen.

8. ____

Einer wird von einem geliebt.



9. $\forall x \, \forall y \; : \; Lxy$

Jeder liebt jeden.

10. ____

Jeder wird von jedem geliebt.

Lösung auf Seite 4

Aufgabe 2 Aussagen

Untersuchen Sie die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\neg\neg A &= A \\
(A \Rightarrow B) &= (\neg A \vee B) = (\neg B \Rightarrow \neg A) \\
(A \Leftrightarrow B) &= ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)) = \neg(\neg A \Leftrightarrow B) \\
\neg(A \Rightarrow B) &= A \wedge \neg B \\
\neg(A \Leftrightarrow B) &= (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)
\end{aligned}$$

mithilfe der Wahrheitstafel. Überlegen Sie sich Alltagssituationen, die in die Aussagen hineinpassen.

Lösung auf Seite 4

Aufgabe 3 De Morgansche Regeln

Beweisen Sie mit Hilfe von Wahrheitstabellen die sogenannten De Morganschen Regeln für logische Aussagen:

$$\begin{aligned}
\neg(A \wedge B) &= (\neg A) \vee (\neg B)\,, \\
\neg(A \vee B) &= (\neg A) \wedge (\neg B)\,, \\
(A \wedge B) \vee C &= (A \vee C) \wedge (B \vee C)\,, \\
(A \vee B) \wedge C &= (A \wedge C) \vee (B \wedge C)\,,
\end{aligned}$$

wobei A, B, C Aussagen sind.

Lösung auf Seite 5

Aufgabe 4 Kaspar Hauser

Sie befinden sich auf Wanderschaft und haben die Orientierung verloren. Plötzlich stehen Sie an einer Weggabelung. Sie wissen, dass der eine Weg zum Dorf der Lügner führt und der andere zum Dorf derer, die immer die Wahrheit sagen, wissen aber nicht welcher Weg in welches der genannten Dörfer führt. Von einem der beiden Wege kommt jemand auf Sie zugelaufen. Welche Frage stellen Sie dieser Person, um herauszufinden aus welchem der beiden Dörfer sie kommt?

(Bitte Fragen Sie nicht: "Bin ich ein Frosch?")

Lösung auf Seite 6

Aufgabe 5 Lerngruppe

Micha, Ralf, Simone und Inge hatten geplant, sich zu treffen, um für den Mathetest zu lernen. Treffpunkt ist ein Raum, für den nur Ralf und Inge einen Schlüssel haben. Micha und Simone wohnen auf dem Land. Simone hat ein Auto und muss Micha abholen, damit er zum Treffpunkt kommen kann. Simone und Ralf sind Geschwister. Da ihre Mutter krank ist und sie sie pflegen müssen können sie nicht gleichzeitig erscheinen. Am Morgen vor dem Treffen gab es Streit, woraufhin Simone sagte: "Wenn Inge kommt, komme ich nicht."

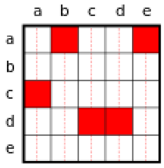
Wer kommt zum Treffen, an dem mehr als eine Person erscheint?

Tipp: Definieren Sie Variablen M, R, S und I für die beteiligten Personen. Die Variablen sind $wahr/falsch$ oder auch 1/0, wenn die entsprechende Person erscheint/nicht erscheint. Beschreiben Sie aussagenlogisch die Abhängigkeiten, die im Text beschrieben sind.

R	M	I	S						
0	0	0	0						
1	0	0	0						
0	1	0	0						
0	0	1	0						
0	0	0	1						
1	1	0	0						
1	0	1	0						
1	0	0	1						
0	1	1	0						
0	1	0	1						
0	0	1	1						
1	1	1	0						
1	1	0	1						
1	0	1	1						
0	1	1	1						
1	1	1	1						

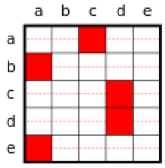
Lösung auf Seite 6

Lösung 1



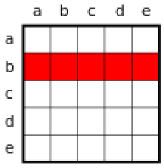
1. $\forall x\,\exists y\ :\ Lyx$

   Jeder wird von jemandem geliebt.



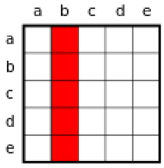
2. $\forall x\,\exists y\ :\ Lxy$

   Jeder liebt jemanden.



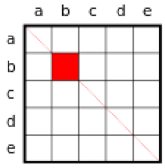
3. $\exists\,x\forall\,y\ :\ Lxy$

   Jemand liebt alle.



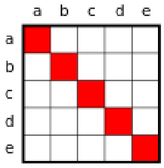
4. $\exists x\,\forall y\ :\ Lyx$

   Jemand wird von allen geliebt.



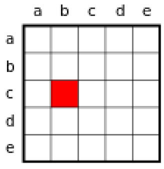
5. $\exists\,x\ :\ Lxx$

   Jemand liebt sich selbst.



6. $\forall x\ :\ Lxx$

   Alle lieben sich selbst.

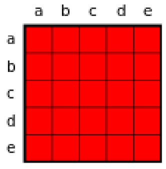


7. $\exists\,x\exists\,y\ :\ Lxy$

   Einer liebt einen.

8. $\exists\,x\exists\,y\ :\ Lyx$

   Einer wird von einem geliebt.



9. $\forall x\,\forall y\ :\ Lxy$

   Jeder liebt jeden.

10. $\forall\,x\forall\,y\ :\ Lyx$

    Jeder wird von jedem geliebt.

Lösung 2 Die zweite Zeile:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$A \Rightarrow B$
W	W	F	F	W	W	W
W	F	F	W	F	F	F
F	F	W	W	W	W	W
F	W	W	F	W	W	W

Eine mögliche Alltagssituation:

A: Es regnet.
B: Die Straße ist nass.

$A \Rightarrow B$: Es regnet und folglich ist die Straße nass.
$\neg B \Rightarrow \neg A$: Die Straße ist nicht nass. Folglich regnet es nicht.
$\neg A \vee B$: Entweder ist die Straße nass, oder es regnet nicht.

Lösung 3 Aus der Wahrheitstabelle

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$A \vee B$
W	W	F	F	W	W
W	F	F	W	F	W
F	F	W	W	F	F
F	W	W	F	F	W

lesen wir

$\neg(A \wedge B)$	$\neg(A \vee B)$	$(\neg A) \vee (\neg B)$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$
F	F	F	F
W	F	W	F
W	W	W	W
W	F	W	F

und lesen direkt

$$
\begin{aligned}
\neg(A \wedge B) &= (\neg A) \vee (\neg B)\,, \\
\neg(A \vee B) &= (\neg A) \wedge (\neg B)
\end{aligned}
$$

ab. Aus einer neuen Wahrheitstafel (für A, B, C gibt es nun $2^3 = 8$ Mglichkeiten)

A	W	W	W	W	F	F	F	F
B	W	W	F	F	W	W	F	F
C	W	F	W	F	W	F	W	F
$A \wedge B$	W	W	F	F	F	F	F	F
$(A \wedge B) \vee C$	W	W	W	F	W	F	W	F
$A \vee C$	W	W	W	W	W	F	W	F
$B \vee C$	W	W	W	F	W	W	W	F
$(A \vee C) \wedge (B \vee C)$	W	W	W	F	W	F	W	F
$A \vee B$	W	W	W	W	W	W	F	F
$(A \vee B) \wedge C$	W	F	W	F	W	F	F	F
$A \wedge C$	W	F	W	F	F	F	F	F
$B \wedge C$	W	F	F	F	W	F	F	F
$(A \wedge C) \vee (B \wedge C)$	W	F	W	F	W	F	F	F

lesen wir

$$(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)\,,$$
$$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

ab.

Lösung 4 Eine mögliche Frage wäre: "Wenn ich Sie fragen würde, ob Sie aus dem Dorf der Lügner kommen, würden Sie dann mit Nein antworten?"

Erklärung: Durch die doppelt gestellte Frage erzwingt man beim Lügner die doppelte Verneinung, der dann wieder die Wahrheit spricht. Was passiert genau?

Lügner antworten: "Nein"

Auf die Frage "Kommen Sie aus dem Dorf der Lügner?" antortet dieser "Nein", denn er kommt aus diesem Dorf und lügt. Sie stellen die Frage aber nicht direkt. Auf die indirekte Frage wäre "Ja" die ehrliche Antwort, da er aber lügt sagt er "Nein".

nicht Lügner antworten: "Ja"

Auf die Frage "Kommen Sie aus dem Dorf der Lügner?" antortet dieser "Nein", denn er kommt nicht aus diesem Dorf und ist ehrlich. Würde er also mit "Nein" antworten? Aber sicher doch, denn er sagt die Wahrheit. Darum sagt er "ja".

Lösung 5

Variablenzuweisung:

R	=	Ralf
M	=	Micha
I	=	Inge
S	=	Simone

Aussagen beschreiben:

Ralf oder Inge müssen kommen:

$$R \vee I$$

muss wahr sein.

Ralf und Simone können nicht gleichzeitig kommen:

$$\neg(R \wedge S)$$

muss wahr sein.

Micha kann nur kommen wenn Simone kommt. Simone kann alleine kommen:

$$M \Rightarrow S$$

muss wahr sein.

Wenn Inge kommt, kommt Simone nicht:

$$I \Rightarrow \neg S$$

muss wahr sein.

Wahrheitstabelle erstellen:

R	M	I	S	¬ S	R∧ S	R∨ I	¬(R∧ S)	I⇒ ¬ S	M⇒ S
0	0	0	0	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	0	1	1	1	1
0	0	0	1	0	0	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	1	1	1	0
1	0	1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
0	1	0	1	0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1	0	1
1	1	1	0	1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	0	0	1	1	0	1
1	1	1	1	0	1	1	0	0	1

Ergebnis auswerten:

Die letzten vier Spalten in einer jeweiligen Zeile müssen alle wahrsein. Daraus ergibt sich, dass

Ralf und Inge kommen.